Université Lyon 1
Licence Sciences et Technologies
Année 2010-2011

Unité d'enseignement: Math I Algèbre
Contrôle final du 20 janvier 2011
Corrigé

Question 1. On désigne le plan complexe par $\mathbf{C}$.
(1) Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{-i\}$, $\dfrac{z-i}{z+i} \neq 1$.
Soit $f : \mathbf{C} \setminus \{-i\} \to \mathbf{C} \setminus \{1\}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

(2) Montrer que pour tout $w \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$, il existe $z \in \mathbf{C} \setminus \{-i\}$ tel que $w = f(z)$.
(3) Montrer que l'application f est injective.
Que peut-on en conclure sur l'application f?
(4) Résoudre l'équation $(z-i)^3 + 8(z+i)^3 = 0$ dans $\mathbf{C}$.

Solution:
(1) On peut procéder par l'absurde: s'il existait $z \neq -i$ tel que $\frac{z-i}{z+i} = 1$, i.e. tel que $z - i = z + i$, on aurait $2i = 0$. Absurde.
Voici une autre manière de faire: quel que soit $z \neq -i$, $1 - \frac{z-i}{z+i} = \frac{z+i-(z-i)}{z+i} = \frac{2i}{z+i} \neq 0$.
(2) Pour $w \neq 1$,

$$(z+i)w = z - i \Leftrightarrow i(1+w) = z(1-w) \Leftrightarrow z = i\frac{1+w}{1-w}.$$

Le complexe $z = i\frac{1+w}{1-w}$ est distinct de $-i$ car

$$i + i\frac{1+w}{1-w} = i\frac{(1-w)+(1+w)}{1-w} = \frac{2i}{(1-w)} \neq 0.$$

Ce complexe convient donc et il est uniquement déterminé par w.
(3) Une réponse immédiate est de relire (2): tout $w \neq 1$ admet un unique antécédent $z \neq -i$ par f.
Si on ne voit pas cela, il s'agit de revenir à la définition, i.e. de vérifier que si $f(z) = f(z')$ alors $z = z'$. On a

$$\begin{aligned} f(z) = f(z') &\Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = \frac{z'-i}{z'+i} \Leftrightarrow (z-i)(z'+i) = (z'-i)(z+i) \\ &\Leftrightarrow zz' + iz - iz' + 1 = z'z + iz' - iz + 1 \\ &\Leftrightarrow 2iz = 2iz' \Leftrightarrow z = z'. \end{aligned}$$

Conclusion: l'application $f : \mathbf{C} \setminus \{-i\} \to \mathbf{C} \setminus \{1\}$ est une bijection.

(4) Commencer par observer que $-i$ n'est pas solution. Dans $\mathbf{C} \setminus \{-i\}$ l'équation équivaut à

$$(\frac{z-i}{z+i})^3 = -8 = 2^3 e^{i\pi}.$$

Ce qui équivaut à dire que $w = f(z)$ est une racine complexe 3−ième de $2^3 e^{i\pi}$ i.e. w est l'un des complexes

$$w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad w_2 = 2e^{i\pi} = -2, \quad w_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = \overline{w_1}.$$

Les 3 solutions en z sont donc

$$z_j = f^{-1}(w_j) = i\frac{1+w_j}{1-w_j},\ 1 \leq j \leq 3.$$

Explicitement, on obtient

$$z_1 = -(\frac{2}{\sqrt{3}} + i), \quad z_2 = -i/3, \quad z_3 = -\overline{z_1} = \frac{2}{\sqrt{3}} - i.$$

Remarque: w_1, w_2, w_3 sont les 3 sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle C_w de centre 0 et de rayon 2 dont l'équation cartésienne est $w\overline{w} = 4$. L'image $f^{-1}(C_w)$ est un cercle C de centre $z_0 = -\frac{5}{3}i$ et de rayon $r = \frac{4}{3}$. Pour situer z_1, z_2, z_3 sur C, il est instructif d'écrire $z_1 - z_0, z_2 - z_0, z_3 - z_0$ sous forme polaire. On a $z_1 = z_0 + re^{i5\pi/6}$, $z_2 = z_0 + re^{i\pi/2}$, $z_3 = z_0 + re^{i\pi/6}$.

Question 2.

(1) a. Déterminer le reste de la division euclidienne de $N = 222^{333}$ par 7 et par 11.

b. Déterminer deux entiers u et v tels que $7u + 11v = 1$.

c. En déduire le reste de N par 77.

(2) Toto veut faire don des livres de sa bibliothèque. Il en a plus de 10. S'il les répartit dans des cartons contenant 20 livres ou des cartons qui en contiennent 25, il lui reste toujours 7 livres. Quel est le nombre minimal de livres dans la bibliothèque de Toto ?

Solution:

(1) a.

Reste par 7: $222 = 31 \cdot 7 + 5 \equiv 5[7]$. D'où $N = 222^{333} \equiv 5^{333}[7]$. Par Fermat, $5^6 \equiv 1[7]$. La division $333 = 55 \cdot 6 + 3$ donne $5^{333} = (5^6)^{55} \cdot 5^3 \equiv 5^3[7]$. Il reste un petit calcul: $5^2 = 25 \equiv 4[7]$, $5^3 \equiv 20[7] = 6[7]$.

Le reste de N par 7 vaut 6.

Reste par 11: $222 = 20 \cdot 11 + 2 \equiv 2[11]$. D'où $N = 222^{333} \equiv 2^{333}[11]$. Par Fermat, $2^{10} \equiv 1[11]$. La division $333 = 33 \cdot 10 + 3$ donne $2^{333} = (2^{10})^{33} \cdot 2^3 \equiv 2^3[11] = 8[11]$.

Le reste de N par 11 vaut 8.

(1) b. On peut observer que le couple $(-3, 2)$ convient. Si on ne voit pas immédiatement cette solution, on écrit l'algorithme d'Euclide:

$$11 = 7 + 4, \quad 7 = 4 + 3, \quad 4 = 3 + 1.$$

En le lisant à l'envers, on obtient

$$1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \cdot 4 - 7 = 2 \cdot (11 - 7) - 7 = 2 \cdot 11 - 3 \cdot 7.$$

(1) c. N satisfait au système de congruences

$$X \equiv 6[7]$$
$$X \equiv 8[11]$$

dont les solutions sont

$$X = N + (7 \cdot 11)\, l = N + 77\, l, \quad l \in \mathbf{Z}.$$

Le reste de N par 77 est donc égal au reste par 77 de toute solution X de ce système. Il suffit de trouver une solution simple, i.e. de trouver U, V tels que $X = 6 + 7U = 8 + 11V$ i.e. tels que

$$7U - 11V = 2.$$

Par (1) b. $(U, V) = (-6, -4)$ convient et $X = 6 - 7 \cdot 6 = -36 \equiv 41[77]$.
Le reste de N par 77 vaut donc 41.

(2) Notons N le nombre de livres. Par hypothèse, 20 divise $N - 7$ et 25 divise $N - 7$. Dès lors ppcm $(20, 25) = 100$ divise $N - 7$, i.e.

$$N = 7 + 100\, l, \quad l \in \mathbf{N}.$$

La condition $10 \leq N$ implique $107 \leq N$.

Question 3.
Répondre par *vrai* ou *faux* aux assertions qui suivent, en justifiant votre réponse par une preuve courte ou un contre-exemple.
(1) Il existe une infinité de couples d'entiers (u, v) tels que

$$231u + 110v = 23.$$

Réponse: c'est faux. Pour 3 entiers a, b, c on sait que l'équation $au + bv = c$ admet une solution (u, v) entière ssi pgcd (a, b) divise c. Les factorisations

$$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11, \quad 110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$$

donnent pgcd $(231, 110) = 11$ et 11 ne divise pas le nombre premier 23.

(2) Soit un entier naturel $n \geq 2$. Tout facteur premier p de $n! + 1$ satisfait $p > n$.
Réponse: c'est vrai. Par définition, $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$. Tout entier d entre 1 et n divise donc $n!$.
Si $n! + 1$ avait un facteur premier $p \leq n$, p serait un commun diviseur de $n! + 1$ et $n!$. p diviserait donc $n! + 1 - n! = 1$. Absurde.

(3) Soit n un entier naturel non nul. Il n'existe pas de triplet (x, y, z) d'entiers impairs tels que $x^n + y^n = z^n$.

Réponse: c'est vrai. Par l'absurde: pour une solution entière (x, y, z) telle que

$$x \equiv 1[2],\ y \equiv 1[2],\ z \equiv 1[2],$$

on aurait $x^n \equiv 1[2]$, $y^n \equiv 1[2]$, $z^n \equiv 1[2]$ et aussi

$$z^n = (x^n + y^n) \equiv (1+1)[2] = 0[2].$$

z^n serait donc à la fois pair et impair.

(4) Soit n un entier naturel non nul. Il y a $\binom{n+2}{2}$ couples d'entiers *naturels* (x, y) pour lesquels $x + y \leq n$.

Réponse: c'est vrai. Voici la liste de ces couples:

$$(0, n); \quad (0, n-1), (1, n-1); \quad (0, n-2), (1, n-2), (2, n-2); \cdots; (0,0), (1,0), (2,0), \ldots, (n,0).$$

Il y en a

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \binom{n+2}{2}.$$

Question 4.

(1) Soit $A = 2\cos(2\pi/5)$. Démontrer que : $A = e^{2i\pi/5} - e^{3i\pi/5}$.

(2) Soit $B = 2\cos(\pi/5)$. Démontrer que : $B = e^{i\pi/5} - e^{4i\pi/5}$.

(3) On pose $\zeta = e^{i\pi/5}$.

a. Calculer ζ^5.

b. Exprimer A et B en fonction de ζ.

c. En déduire que $1 + A - B = 0$.

[Indication : il peut être utile de reconnaître une somme de termes d'une suite géométrique.]

[Remarque : A est la longueur du côté d'un décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 ; B est celle du côté d'un décagone étoilé. Cet exercice montre que la différence entre le périmètre d'un décagone étoilé et un décagone convexe est un entier.]

Solution: On a $e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sin\,\theta$.

(1) Observer que $3\pi/5 = \pi - 2\pi/5$ et $cos(\pi - \theta) = -cos\,\theta$, $sin(\pi - \theta) = sin\,\theta$.

(2) Même observation que pour (1).

(3)

(a) $\zeta^5 = (e^{i\pi/5})^5 = e^{i\pi} = -1$.

(b) $A = \zeta^2 - \zeta^3$ et $B = \zeta - \zeta^4$.

(c) $1 + A - B = 1 - \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 + \zeta^4 = \frac{1-(-\zeta)^5}{1-(-\zeta)} = \frac{1+\zeta^5}{1+\zeta} = \frac{1-1}{1+\zeta} = 0$.