Université LYON 1
L1 Mathématiques
Automne 2010

UE Math I Algèbre. Seq. 2 et Seq. 5
CC2 du 2 novembre 2010

Durée de l'épreuve: 1 heure.
Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Questions 1 (Arithmétique)

(1) Donner, en justifiant votre réponse, le nombre de diviseurs positifs $d \in \mathrm{N}$ de 100^{100}.

(2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 3 et par 5. En déduire le reste de la division euclidienne de 101^{101} par 15.

(3) Entre 500 et 1000 étudiants se sont inscrits à une UE d'arithmétique. Répartis en groupes de 18, de 20, ou de 24, il reste toujours 9 étudiants. Quel est le nombre d'inscrits?

(4) Soit $p \in \mathrm{N}$ un nombre premier impair et $a \in \mathrm{N}$ un entier tel que $0 < a < p$.
L' assertion: p divise l'un des entiers $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ et $a^{\frac{p-1}{2}} + 1$, est-elle vraie? Est-elle fausse? Justifier votre réponse.

Questions 2 (Applications)

Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un argument bref (mais précis), un résultat de cours (cité avec précision mais sans démonstration), un calcul ou un contre-exemple.

(1) Si les applications $u : \mathrm{N} \to \mathrm{Z}$ et $v : \mathrm{Z} \to \mathrm{N}$ sont bijectives, alors l'application $u \circ v \circ u : \mathrm{N} \to \mathrm{Z}$ est aussi bijective. *vrai* *faux*

(2) L'application $f : \mathrm{N}^3 \to \mathrm{N} : (a, b, c) \mapsto f(a, b, c) = 2^a 3^b 5^c$ est

(i) bijective (ii) injective mais pas surjective (iii) surjective mais pas injective (iv) ni surjective ni injective

(3) Soit $n \in \mathrm{N} \setminus \{0, 1\}$. L'application $\varphi : \mathrm{Z} \to \mathrm{N} : l \mapsto \varphi(l)$ qui à l'entier $l \in \mathrm{Z}$ associe le reste $\varphi(l)$ de la division euclidienne de l par n est

(i) bijective (ii) injective mais pas surjective (iii) surjective mais pas injective (iv) ni surjective ni injective

$\star$ Question bonus $\star$

(4) Soient $a, b, c, d \in \mathrm{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. Déterminer l'application réciproque de la bijection

$$f : \mathrm{Z}^2 \to \mathrm{Z}^2 : (u, v) \mapsto (au + bv + 1, cu + dv - 1).$$