Exercice 1 :

On donne θ un réel tel que : $\cos(\theta_0) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants (en fonction de θ_0) :

$a = 3i(2+i)(4+2i)(1+i)$ et $b = \frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$

Correction

$$|a| = |3i(2+i)(4+2i)(1+i)| = |3i| \times |2+i| \times |4+2i| \times |1+i|$$
$$= 3 \times \sqrt{2^2+1^2} \times 2 \times |2+i| \times \sqrt{1^2+1^2} = 6\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^2 \times \sqrt{2} = 6 \times 5\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

$\arg(a) = \arg\big(3i(2+i)(4+2i)(1+i)\big) = \arg(3i) + \arg(2+i) + \arg(4+2i) + \arg(1+i) + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + \arg(2+i) + \arg\big(2(2+i)\big) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + \arg(2+i) + arg 2 + \arg(2+i) + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2\arg(2+i) + 2k\pi$

Soit θ un argument de $2+i$, $\cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ donc $\cos(\theta) = \cos(\theta_0)$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta_0)$, on en déduit que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$

Par suite

$\arg(a) = \frac{3\pi}{4} + 2\theta_0 + 2k\pi$

$$|b| = \left|\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}\right| = \frac{|4+2i| \times |-1+i|}{|2-i| \times |3i|} = \frac{2 \times |2+i| \times \sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2} \times 3} = \frac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5} \times 3}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\arg(b) = \arg(4+2i) + \arg(-1+i) - \arg(2-i) - \arg(3i) + 2k\pi = \theta_0 + \frac{3\pi}{4} - (-\theta_0) - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$= \frac{\pi}{4} + 2\theta_0 + 2k\pi$$

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes

1°) $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$

2°) $(1+i)z^2 - (3+i)z - 6 + 4i = 0$

3°) $(1+2i)z^2 - (9+3i)z - 5i + 10 = 0$

4°) $(1+3i)z^2 - (6i+2)z + 11i - 23 = 0$

Correction

1°) $\Delta = (1-5i)^2 - 4i(6i-2) = 1 - 25 - 10i + 24 + 8i = -2i$

Il faut trouver δ tel que $\Delta = \delta^2$

Première méthode :

$-2i = 1 - 2i - 1 = (1-i)^2$ c'est une identité remarquable. Donc $\delta_1 = 1 - i$ ou $\delta_2 = -1 + i$

Deuxième méthode

On pose $\delta = a + ib$, $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -2i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow -2i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-2i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2 = a^2 + b^2$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab = -2 \Leftrightarrow ab = -1$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a = 1$ alors $b = -1$ et $\delta = 1 - i$ et si $a = -1$ alors $b = 1$ et $\delta = -1 + i$. Ce sont bien les mêmes solutions qu'avec la première méthode.

Troisième méthode

$\Delta = -2i = 2e^{\frac{3i\pi}{2}}$, donc les racines deuxièmes de Δ sont $\delta = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i$ et $\delta = -\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = 1 - i$.

Pour résoudre $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$, on n'a besoin que d'une racine deuxième, on prend, par exemple $\delta = 1 - i$.

Les deux solutions sont :

$$z_1 = \frac{-(1-5i)-(1-i)}{2i} = \frac{-2+6i}{2i} = \frac{-1+3i}{i} = \frac{(-1+3i)(-i)}{i(-i)} = 3 + i$$

$$z_2 = \frac{-(1-5i)+(1-i)}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

2°)

$$\Delta = \left(-(3+i)\right)^2 - 4(1+i)(-6+4i) = (3+i)^2 - 4(-6+4i-6i-4) = 9 - 1 + 6i - 4(-10-2i)$$
$$= 8 + 6i + 40 + 8i = 48 + 14i$$

On pose $\delta = a + ib$, $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 48 + 14i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow 48 + 14i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |48 + 14i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2|24 + 7i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{24^2 + 7^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{576 + 49} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{625} = 2 \times 25 = 50$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ a^2 + b^2 = 50 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 98 \Leftrightarrow a^2 = 49$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 7 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab = 14 \Leftrightarrow ab = 7$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 7$ alors $b = 1$ et $\delta = 7 + i$ et si $a = -7$ alors $b = -1$ et $\delta = -7 - i$

Deuxième méthode

$\Delta = 48 + 14i = 49 + 2 \times 7i - 1 = (7+i)^2$ donc $\delta = 7 + i$ ou $\delta = -7 - i$.

Troisième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 48 \\ 2ab = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{7}{a}\right)^2 = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{49}{a^2} = 48 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 49 = 48a^2 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 48a^2 - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 48A - 49 = 0 \\ b = \frac{7}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2 - 48A - 49 = 0$ est $\Delta' = 48^2 + 4 \times 49 = 2500 = 50^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{48-50}{2} = -1$ et $A_2 = \frac{48+50}{2} = 49$, $A_1 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -1$, par contre $a^2 = 49$ admet deux solutions $a = -7$ et $a = 7$.

Si $a = -7$ alors $b = \frac{7}{a} = -1$ et si $a = 7$ alors $b = \frac{7}{a} = 1$, on retrouve les mêmes solutions.

Les solutions de $(1+i)z^2 - (3+i)z - 6 + 4i = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{(3+i)-(7+i)}{2(1+i)} = -\frac{4}{2(1+i)} = -\frac{2}{1+i} = -\frac{2(1-i)}{1^2+1^2} = -1 + i$$

$$z_2 = \frac{(3+i)+(7+i)}{2(1+i)} = \frac{10+2i}{2(1+i)} = \frac{5+i}{1+i} = \frac{(5+i)(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{5-5i+i+1}{1^2+1^2} = \frac{6-4i}{2} = 3 - 2i$$

3°)

$$\Delta = \left(-(9+3i)\right)^2 - 4(1+2i)(-5i+10) = (3(3+i)^2) - 4(-5i+10+10+20i)$$
$$= 9(9-1+6i) - 4(-25) = 9(8+6i) - 4(20+15i) = 72 + 54i - 80 - 60i = -8 - 6i$$

On pose $\delta = a + ib$, $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -8 - 6i = (a+ib)^2 \Leftrightarrow -8 - 6i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-8 - 6i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{64 + 36} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{100} = 10$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$, d'où l'on tire $b^2 = 9$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 3, d'après l'équation $2ab = -6 \Leftrightarrow ab = -3$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a = 1$ alors $b = -3$ et $\delta = 1 - 3i$ et si $a = -1$ alors $b = 3$ et $\delta = -1 + 3i$

Deuxième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\frac{-3}{a}\right)^2 = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \frac{9}{a^2} = -8 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 9 = -8a^2 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a^4 + 8a^2 - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 + 8A - 9 = 0 \\ b = \frac{-3}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2 + 8A - 9 = 0$ est $\Delta' = 8^2 + 4 \times 9 = 100 = 10^2$ donc ses solutions sont $A_1 = \frac{-8-10}{2} = -9$ et $A_2 = \frac{-8+10}{2} = 1$, $A_2 < 0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2 = -9$, par contre $a^2 = 1$ admet deux solutions $a = -1$ et $a = 1$.

Si $a = -1$ alors $b = \frac{-3}{a} = 3$ et si $a = 1$ alors $b = \frac{-3}{a} = -1$, on retrouve les mêmes solutions.

Troisième méthode

$\Delta = -8 - 6i = 1 - 6i - 9 = (1 - 3i)^2$ donc $\delta = 1 - 3i$ et $\delta = -1 + 3i$

Les solutions de $(1 + 2i)z^2 - (9 + 3i)z - 5i + 10 = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{(9 + 3i) - (1 - 3i)}{2(1 + 2i)} = \frac{8 + 6i}{2(1 + 2i)} = \frac{4 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(4 + 3i)(1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{4 - 8i + 3i + 6}{10} = 2 - i$$

$$z_2 = \frac{(9 + 3i) + (1 - 3i)}{2(1 + 2i)} = \frac{10}{2(1 + 2i)} = \frac{5}{1 + 2i} = \frac{5(1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = 1 - 2i$$

4°)

$$\Delta = (-(6i + 2)^2) - 4(1 + 3i)(11i - 23) = (6i + 2)^2 - 4(11i - 23 - 33 - 69i)$$
$$= -36 + 24i + 4 - 4(-56 - 58i) = -32 + 24i + 224 + 232i = 192 + 256i = 64(3 + 4i)$$

Si j'ai mis 64 en facteur, c'est que maintenant il suffit de trouver une racine deuxième de $3 + 4i$, ce qui est beaucoup plus facile que de trouver une racine deuxième de $192 + 256i$.

On pose $\delta = a + ib$, $\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow 3 + 4i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |3 + 4i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{25} = 5$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4$, d'où l'on tire $b^2 = 1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab = 4 \Leftrightarrow ab = 2$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = 2$ alors $b = 1$ et $\delta = 2 + i$ et si $a = -2$ alors $b = -1$ et $\delta = -2 - i$

Donc $(2 + i)^2 = 3 + 4i$ entraine que $\Delta = 64(3 + 4i) = 8^2(2 + i)^2 = \left(8(2 + i)\right)^2 = (16 + 8i)^2$

Deuxième méthode

$3 + 4i = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \left(\dfrac{2}{a}\right)^2 = 3 \\ b = \dfrac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - \dfrac{4}{a^2} = 3 \\ b = \dfrac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 4 = 3a^2 \\ b = \dfrac{2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \\ b = \dfrac{2}{a} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^2 - 3A - 4 = 0 \\ b = \dfrac{2}{a} \end{cases}$$

Les solutions de $A^2 - 3A - 4 = 0$ sont $A_1 = -1 < 0$ et $A_2 = 4$, donc $a^2 = 4$,

Si $a=-2$ alors $b=\frac{2}{a}=-1$ et alors $\delta=-2-i$, si $a=2$ alors $b=\frac{2}{a}=1$ et alors $\delta=2+i$.
Les solutions de $(1+3i)z^2-(6i+2)z+11i-23=0$ sont

$$z_1=\frac{6i+2-(16+8i)}{2(1+3i)}=\frac{-14-2i}{2(1+3i)}=\frac{-7-i}{1+3i}=\frac{(-7-i)(1-3i)}{1^2+3^2}=\frac{-7+21i-i-3}{10}=-1+2i$$

$$z_2=\frac{6i+2+(16+8i)}{2(1+3i)}=\frac{18+14i}{2(1+3i)}=\frac{9+7i}{1+3i}=\frac{(9+7i)(1-3i)}{1^2+3^2}=\frac{9-27i+7i+21}{10}=3-2i$$

Exercice 3 :

Soit $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1°) Calculer z^2, puis déterminer le module et un argument de z^2, puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.

2°) En déduire le module et un argument de z.

3°) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Correction

$$z^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)+2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$=2\sqrt{3}+2i\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)(2-\sqrt{3})}=2\sqrt{3}+2i\sqrt{2^2-3}=2\sqrt{3}+2i$$

$$|z^2|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{4\times 3+4}=\sqrt{16}=4$$

Si on pose $\theta=\arg\left(z^2\right)$, $\cos(\theta)=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ donc $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Autre méthode $z^2=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=$, donc $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

2°) On déduit de la première question que $|z^2|=4$ donc $|z|^2=4$ et que $|z|=2$. Et que les argument possible de z sont $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)=\frac{\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, donc $z=2e^{\frac{i\pi}{12}}$ ou $z=-2e^{\frac{i\pi}{12}}$. Mais $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ entraine que le cosinus et le sinus de ses arguments sont positifs, donc $z=2e^{\frac{i\pi}{12}}$

3°) D'après la question précédente

$$2e^{\frac{i\pi}{12}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\Leftrightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+isin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+isin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\\ sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{cases}$$