Fiche III : Espaces vectoriels normés

Exercice 1 :

1) N n'est pas une norme car N n'est pas homogène :
$N(1) = 1$ et $N(2 \times 1) = N(2) = 4 \neq 2.N(1)$.

2) N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :

i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x,y) = 0 \Rightarrow |x| + 2|y| = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$.

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N(\alpha(x,y)) = N(\alpha x, \alpha y)$

$$= |\alpha x| + 2|\alpha y|$$
$$= |\alpha|\,|x| + 2\,|\alpha|\,|y|$$
$$= |\alpha|\,(|x| + 2\,|y|)$$
$$= |\alpha|\, N(x,y).$$

iii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$N\big((x,y) + (x',y')\big) = N(x+x', y+y')$$
$$= |x+x'| + 2|y+y'|$$
$$\leq |x| + |x'| + 2(|y| + |y'|)$$
$$= (|x| + 2|y|) + (|x'| + 2|y'|)$$
$$= N(x,y) + N(x',y').$$

3) Soit $a = (1,0)$ et $b = (0,1)$. Alors :

$$\left.\begin{aligned} N(a+b) &= N(1,1) = (\sqrt{1}+\sqrt{1})^2 = 4 \\ N(a) &= N(1,0) = (\sqrt{1}+\sqrt{0})^2 = 1 \\ N(b) &= N(0,1) = (\sqrt{0}+\sqrt{1})^2 = 1 \end{aligned}\right\} \text{ donc } N(a+b) > N(a)+N(b)$$

Donc N n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.

4) N est une norme sur $\mathbb{R}^2$: Elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et

(i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x,y) = 0 \Rightarrow |x+y| + |x| = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0).$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x, \lambda y) &= |\lambda x + \lambda y| + |\lambda x| \\ &= |\lambda(x+y)| + |\lambda x| \\ &= |\lambda|\,|x+y| + |\lambda|\,|x| \\ &= |\lambda|\,(|x+y| + |x|) \\ &= |\lambda|\, N(x,y). \end{aligned}$$

(iii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} N((x,y) + (x',y')) &= N(x+x', y+y') \\ &= |x+x'+y+y'| + |x+x'| \\ &\leq |x+y| + |x'+y'| + |x| + |x'| \\ &= |x+y| + |x| + |x'+y'| + |x'| \\ &= N(x,y) + N(x',y'). \end{aligned}$$

5) N est une norme sur $\mathbb{R}^2$: elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :

(i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x,y) = 0 \implies |x+3y| = 0$ et $|x-y| = 0$

$$\implies \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \implies (x,y) = (0,0).$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x, \lambda y) = \max(|\lambda x + 3\lambda y|, |\lambda x - \lambda y|)$$
$$= \max(|\lambda|\,|x+3y|, |\lambda|\,|x-y|)$$
$$= |\lambda| \max(|x+3y|, |x-y|) = |\lambda|\, N(x,y)$$

(iii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$N((x+y)+(x',y')) = N(x+x', y+y')$$
$$= \max(|x+x'+3(y+y')|, |x+x'-y-y'|)$$

avec :

$$|x+x'+3(y+y')| \leq |x+3y| + |x'+3y'| \leq N(x,y) + N(x',y') \quad (1)$$
$$|x+x'-y-y'| \leq |x-y| + |x'-y'| \leq N(x,y) + N(x',y') \quad (2)$$

En combinant (1) et (2) on obtient :

$$\max(|x+x'+3(y+y')|, |x+x'-y-y'|) \leq N(x,y) + N(x',y')$$

c-a-d $N((x,y) + (x',y')) \leq N(x,y) + N(x',y')$.

6) N n'est pas une norme sur $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ car pour la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array}$ qui est une fonction continue et non bornée sur $\mathbb{R}$ on a $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = +\infty$.

7) N n'est pas une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ car N n'est pas homogène.
Soit $f : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array}$. Alors $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ avec :

$$N(f) = 1 \quad \text{et} \quad N(2f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |2|^2 = 4 \neq 2 . N(f).$$

8) N n'est pas une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ car elle ne vérifie pas la propriété de séparation. En effet on peut construire une fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ <u>non nulle</u> telle que $N(f)=0$.

Par exemple : $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,\frac{1}{2}] \\ x-\frac{1}{2} & \text{si } x \in]\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

est continue, non nulle ($f(1)=\frac{1}{2}\neq 0$) et vérifie :

$$N(f) = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f(x)| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |0| = 0.$$

9) N est une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car une fonction f continue sur $[0,1]$ est bornée sur $[0,1]$ donc $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ est fini. De plus on a :

(i) $\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $N(f)=0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1],\ |f(x)|=0$$

$\Rightarrow f$ est la fonction nulle sur $[0,1]$.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$,

$$N(\lambda f) = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda|\,|f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda|\, N(f).$$

(iii) $\forall f,g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on a :

$$\forall x\in[0,1],\ |(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)|$$
$$\leqslant |f(x)| + |g(x)|$$

Donc $\forall x \in [0,1]$: $|(f+g)(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$

$$= N(f) + N(g).$$

Puis en passant au sup à gauche :

$$\sup_{x\in[0,1]} |(f+g)(x)| \leq N(f) + N(g)$$

c-a-d : $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$

6) N est une norme sur $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$.

(i) $\forall f \in \mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$:

$N(f) = 0 \Rightarrow \forall t \in [0,2\pi],\ |f(t)\sin t| = 0$

car l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

$\Rightarrow \forall t \in [0,2\pi]\setminus\{0,\pi,2\pi\},\ f(t) = 0$

$\Rightarrow \forall t \in [0,2\pi],\ f(t) = 0$ car f est continue.

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$:

$$N(\lambda f) = \int_0^{2\pi} |\lambda f(t)\sin t|\,dt = \int_0^{\pi} |\lambda|\,|f(t)\sin t|\,dt$$

$$= |\lambda| \int_0^{2\pi} |f(t)\sin t|\,dt = |\lambda|\,N(f).$$

(iii) $\forall f, g \in \mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$:

$$N(f+g) = \int_0^{\pi} |(f(t)+g(t))\sin t|\,dt$$

$$\leq \int_0^{\pi} |f(t)\sin t|\,dt + \int_0^{2\pi} |g(t)\sin t|\,dt = N(f) + N(g).$$

ii) La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{2} - t$ est continue sur $[0,1]$

et vérifie $N(f) = 0$ mais $f \neq 0$. Donc N n'est pas une norme.

Exercice 2 :

Rappel : $(X, \|.\|)$ un evn. Le diamètre d'une partie $A \subset X$ non vide bornée est défini par :

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|$$

Il s'agit de démontrer que :

$$\forall x,y \in A \cup B, \quad \|x - y\| \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B) \quad (*)$$

Puis par passage au sup dans le membre de gauche on obtient le résultat demandé.

* Si $x \in A$ et $y \in A$ alors $\|x-y\| \leq \delta(A)$ et le résultat est immédiat. De même si $x \in B$ et $y \in B$.

* Si $x \in A$ et $y \in B$: On se donne un $\varepsilon > 0$. Par définition de l'inf (plus petit minorant), il existe $x^* \in A$ et $y^* \in B$ tq :

$$\|x^* - y^*\| \leq d(A,B) + \varepsilon.$$

On a alors :

$$\|x-y\| = \|x - x^* + x^* - y^* + y^* - y\|$$
$$\leqslant \|x-x^*\| + \|x^*-y^*\| + \|y^*-y\|$$
$$\leqslant \delta(A) + d(A,B) + \varepsilon + \delta(B)$$

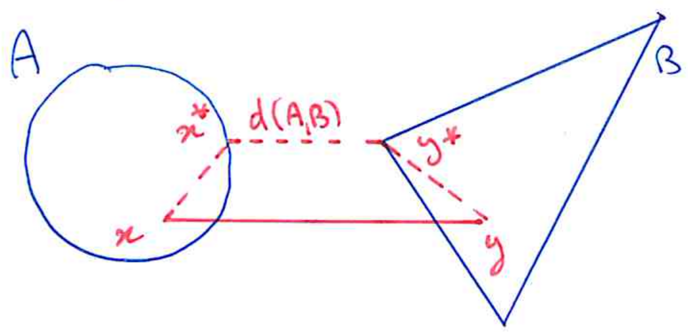
On en déduit que $\|x-y\| \leqslant \delta(A) + \delta(B) + d(A,B) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Donc $\|x-y\| \leqslant \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$.

On a donc démontré (*) et par passage au sup :

$$\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B) + d(A,B).$$

Illustration graphique :



On peut avoir égalité avec des points "alignés" et réalisant le suprémum du diamètre dans chacune des parties A et B.

Par exemple : $X = \mathbb{R}$ muni de la norme $|.|$.

$A = [0,1]$ et $B = [2,3]$. $\delta(A) = 1$, $\delta(B) = 1$ et $d(A,B) = 1$.

De plus $\delta(A\cup B) = \sup\limits_{x\in A, y\in B} |x-y| = 3 = \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$.

Exercice 3 :

1) Remarquons d'abord que dans $\mathbb{R}$, une boule ouverte de centre x et de rayon $\alpha > 0$ est l'intervalle ouvert $]x-\alpha, x+\alpha[$.

* $]a;b]$ n'est pas ouvert car $\forall \alpha > 0$:

$$]a,b]^c \cap]b-\alpha, b+\alpha[\text{ n'est pas vide, il contient } b+\frac{\alpha}{2}.$$

donc quelle que soit la boule ouverte de centre b, elle n'est pas incluse dans $]a,b]$.

* $]a;b]$ n'est pas fermé car son complémentaire $]-\infty, a] \cup]b, +\infty[$ n'est pas ouvert. Quelle que soit la boule ouvert de centre a, cette boule contiendra des points qui ne sont pas dans $]-\infty, a] \cup]b, +\infty[$.

Par exemple :

$$]a,b] \cap]a-\alpha, a+\alpha[\text{ contient } a-\frac{\alpha}{2}.$$

Autre méthode : on construit une suite de points (x_n) dans $]a,b]$ qui converge vers $x \notin]a,b]$.

La suite $x_n = a + \dfrac{b-a}{n}$ convient.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]a,b]$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \notin]a,b]$.

* $[a,+\infty[$ est fermé car son complémentaire $]-\infty, a[$ est ouvert. En effet, soit $x \in]-\infty, a[$ et soit $\alpha = a - x$.

Alors $]x-\frac{\alpha}{2}, x+\frac{\alpha}{2}[\subset]-\infty, a[$.

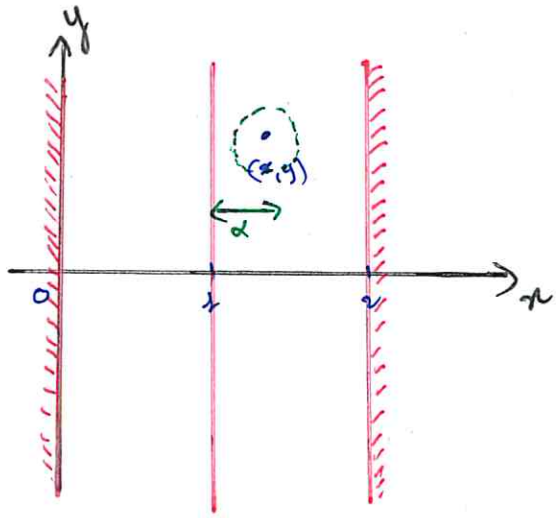
Autre méthode avec les suites :

Soit (x_n) une suite d'éléments de $[a,+\infty[$ qui converge vers $x \in \mathbb{R}$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq a$. En faisant tendre n vers $+\infty$, comme les inégalités larges passent à la limite on a $x \geq a$ c-à-d $x \in [a,+\infty[$.
Donc $[a,+\infty[$ est fermé.

Montrons que $[a,+\infty[$ n'est pas ouvert. Pour cela montrons que son complémentaire $]-\infty,a[$ n'est pas fermé. La suite $\left(a-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de $]-\infty,a[$ qui converge vers $a \notin]-\infty,a[$ donc $]-\infty,a[$ n'est pas fermé donc $[a,+\infty[$ n'est pas ouvert.

2) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 0 < |x-1| < 1\}$.

A est la bande comprise strictement entre les droites d'équations $x=0$ et $x=2$ privée de la droite d'éq. $x=1$.



Pour tout $(x,y) \in A$:
$x \neq 1$ et $-1 < x-1 < 1$
c-à-d $x \neq 1$ et $0 < x < 2$.

Soit $\alpha = \min(x, |x-1|, 2-x)$ alors la boule ouverte de centre (x,y) et de rayon $\frac{\alpha}{2}$ est incluse dans A. En effet, soit (x',y') quelconque dans cette boule.

Alors :

$$|x-x'| \leq \|(x,y)-(x',y')\|_2 \leq \frac{\alpha}{2} < \min(x, |x-1|, 2-x)$$

Donc
$$\left.\begin{array}{l} |x-x'| < x \Rightarrow x'>0 \\ |x-x'| < |x-1| \Rightarrow x' \neq 1 \\ |x-x'| < 2-x \Rightarrow x'<2 \end{array}\right\} (x',y') \in A.$$

Donc A est ouvert.

Montrons que A n'est pas fermé. La suite $(1/n, 0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $(0,0) \notin A$ donc A n'est pas fermé.

3) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } 0 \leq x \leq z\}$.

Soit $(x_n, y_n, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B qui converge vers $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a $0 \leq x_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}$ et par passage à la limite on obtient $0 \leq x \leq z$ c-a-d $(x,y,z) \in B$. Donc B est fermé.

B n'est pas ouvert car $(0,0,0) \in B$ et que $\forall r>0$, la boule ouverte de centre $0_{\mathbb{R}^3}$ et de rayon r contient le point $(\frac{r}{2},0,0)$ qui n'est pas dans B.

4) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } |x|<1 \text{ et } |y| \leq 2\}$.

C n'est pas ouvert. En effet toute boule ouverte centrée en $(0,2) \in C$ et de rayon $r>0$ contient $(0, 2+r/2) \notin C$.

C n'est pas fermé car la suite $(1-\frac{1}{n}, 0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de C qui converge vers $(1,0) \notin C$.

5) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$.

D n'est pas fermé. En effet, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels (u_n) qui converge vers $\sqrt{2}$. On a alors $(u_n, 0) \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $(u_n, 0) \longrightarrow (\sqrt{2}, 0) \notin D$.

Remarque : Pour tout $a>0$ un exemple de suite qui converge vers $\sqrt{a}$:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^{+*}, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right). \end{cases}$$

Si $a \in \mathbb{Q}$ et $u_0 \in \mathbb{Q}$ alors $u_n \in \mathbb{Q}$ $\forall n$. C'est la méthode de Héron.

D n'est pas ouvert car son complémentaire $\mathbb{R}^2 \setminus D$ n'est pas fermé.
On a $\mathbb{R}^2 \setminus D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\}$.
La suite $\left(\frac{\sqrt{2}}{n}, 0\right)$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^2 \setminus D$ qui converge vers $(0,0) \in D$. Donc $\mathbb{R}^2 \setminus D$ n'est pas fermé donc D n'est pas ouvert.

6) $E = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tq } x_1^2 + \dots + x_p^2 \leq 5\}$ est fermé.
En effet soit $(x_{1,n}, \dots, x_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. On a $x_{1,n}^2 + \dots + x_{p,n}^2 \leq 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et en passant à la limite $n \to +\infty$ on a $x_1^2 + \dots + x_p^2 \leq 5$ donc $(x_1, \dots, x_p) \in E$.

E n'est pas ouvert car son complémentaire $\mathbb{R}^p \setminus E$ n'est pas fermé.
En effet, la suite $\left(\sqrt{5} + \frac{1}{n}, 0, 0, \dots, 0\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de $\mathbb{R}^p \setminus E$ qui converge vers $(\sqrt{5}, 0, \dots, 0) \in E$.

Exercice 4 :

1) On a toujours $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

Comme $A_i \subset B_n$ $\forall i$ on a $\overline{A_i} \subset \overline{B_n}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et donc $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \subset \overline{B_n}$. Montrons l'inclusion inverse. Pour cela il suffit de vérifier que $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ est un fermé qui contient B_n. Comme $\overline{B_n}$ est le plus petit fermé qui contient B_n on aura alors $\overline{B_n} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

$x \in B_n \Rightarrow \exists i \in [\![1, n]\!]$ tq $x \in A_i$

$\Rightarrow \exists i \in [\![1, n]\!]$ tq $x \in \overline{A_i}$ (car $A_i \subset \overline{A_i}$)

$\Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Donc $B_n \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

De plus $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ est une union finie de fermés, c'est donc un fermé; cqfd.

2) On montre comme dans 1) que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \subset \overline{B}$. Pour trouver un contrexemple il nous faut une situation avec une union infinie de fermés qui n'est pas un fermé.

Dans $\mathbb{R}$, notons $A_i = [\frac{1}{i}, +\infty[$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

On a alors $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} [1/i, +\infty[= \mathbb{R}^{+*}$ et $\overline{B} = \mathbb{R}^+$.

De plus $A_i = \overline{A_i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ donc $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = B \not\supset \overline{B}$.