Feuille 7 : Fractions rationnelles

Exercice 1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples, sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$, des fractions rationnelles suivantes.

a) $\dfrac{1}{(X+1)(X-2)}$, $\dfrac{X}{(X+1)(X-2)}$, $\dfrac{X}{X^2-1}$.

b) $\dfrac{X+1}{X^2+1}$, $\dfrac{X^2}{X^3-1}$.

c) $\dfrac{X-1}{X^2(X^2+1)}$, $\dfrac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$.

d) $\dfrac{X^4}{X^2-3X+2}$, $\dfrac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}$.

Exercice 2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+1)^2 - X^2}.$$

Indication : Noter que F est paire, *i.e.* $F(X) = F(-X)$.

Exercice 3. Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle E telle que $E^2 = X$.

Exercice 4. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $R_n(x) = \dfrac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux. Déterminer les racines et pôles de la fraction rationnelle $\dfrac{(X^p-1)}{(X^q-1)}$ en précisant leur ordre de multiplicité.

Exercice 6. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$, $n \geq 2$.

1. Déterminer S_n en fonction de n pour tout $n \geq 2$.
2. En déduire sa limite.
3. Répéter les questions 1. et 2. pour la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \ \forall n \geq 2$$

Exercice 7. Pour chacune des fonctions suivantes donner leur ensemble de définition, déterminer les équations des asymptotes en $\pm\infty$ puis étudier la position du graphe de la fonction par rapport aux asymptotes.

a) $x \mapsto \dfrac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2}$ b) $x \mapsto \dfrac{2x^3+x^2-x+1}{x^2-3x+2}$

Exercice 8.
1. Montrer la relation
$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos(x)\cos(nx),$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique polynôme P_n tel que
$$P_n(\cos(x)) = \cos(nx), \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$
3. Calculer P_0 et P_1. Montrer que P_n est de degré n et déterminer son terme dominant.
4. En utilisant la relation (1), déterminer les racines de P_n pour tout n.
5. Pour $n \geq 1$, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction $\dfrac{1}{P_n}$.