Examen finale Algèbre IV 2019 Corrigé

Exercice 1.
On considère l'espace vectoriel de polynômes de degré au plus 2 :

$$\mathbb{R}_2[X] : \{a_2X^2 + a_1X + a_0, \quad \text{où } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ on pose $< P(X), Q(X) >= P(0)\cdot Q(0) + P(1)\cdot Q(1) + P(2)\cdot Q(2)$.

1. Vérifier qu'avec cette application, $\mathbb{R}_2[X]$ est muni d'un produit scalaire.
2. On considère le sous-espace F de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par deux monômes : 1 et X. En utilisant la procédure de Gram-Schmidt trouver une base orthonormée de F.
3. On considère les polynômes $R(X) = X^2$ et $S(X) = X^2 - X + 2$ Calculer les distances de R et de S à F, les comparer et expliquer le résultat de cette comparaison.

1. Produit scalaire : - bilinéaire
- symétrique
- défini positive.

- Linéaire à gauche :

$$<P_1(x)+kP_2(x), Q(x)> = (P_1(0)+kP_2(0))Q(0) + (P_1(1)+kP_2(1))Q(1) + (P_1(2)+kP_2(2))Q(2)$$
$$= P_1(0)Q(0) + P_1(1)Q(1) + P_1(2)Q(2) + k(P_2(0)Q(0) + P_2(1)Q(1) + P_2(2)Q(2))$$
$$= <P_1(x), Q(x)> + <P_2(x), Q(x)>$$

- symétrique

$<P(x), Q(x)> = <Q(x), P(x)>$ - évident.

lin. à gauche + symétrique $\Rightarrow$ bilinéaire.

- défini positive : $<P(x), P(x)> = 0 \Rightarrow P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 = 0$

$\Rightarrow P(0) = P(1) = P(2) \Rightarrow P$ a au moins 3 racines

mais P en tant que polynôme de dég ≤ 2

a au plus 2 racines ou $P \equiv 0$. Donc $P \equiv 0$.

Positive car $<P(x), P(x)> = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geq 0$ - somme de carrés.

2. Soit $\tilde{q}_1 = 1$ $\quad \|\tilde{q}_1\|^2 = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3$, $q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1}$

$\tilde{q}_2 = x - <\frac{1}{\sqrt{3}}, x>\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = x - \frac{1}{3}(1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 2) = x - 1$

$\|\tilde{q}_2\|^2 = (0-1)(0-1) + (1-1)(1-1) + (2-1)(2-1) = 2$, $q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)}$

3. La distance d'un polynôme P au sous-espace F est la distance de P à sa projection P_F sur F.

La projection $P_F = \langle P, q_1 \rangle q_1 + \langle P, q_2 \rangle q_2$

Pour R et S on a :

$$R_F = \frac{1}{3} \langle x^2, 1 \rangle 1 + \frac{1}{2} \langle x^2, (x-1) \rangle (x-1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1\right) \cdot 1 + \frac{1}{2}\left(0^2 \cdot (0-1) + 1^2 \cdot (1-1) + 2^2 (2-1)\right)(x-1)$$

$$= \frac{5}{3} \cdot 1 + 2 \cdot (x-1) = 2x - \frac{1}{3}$$

$R - R_F = x^2 - 2x + \frac{1}{3}$, $\|R - R_F\|^2 = \langle x^2 - 2x + \frac{1}{3}, x^2 - 2x + \frac{1}{3} \rangle$

$$\|R - R_F\|^2 = \left(0 - 2 \cdot 0 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1^2 - 2 \cdot 1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2^2 - 2 \cdot 2 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$S_F = \frac{1}{3} \langle (x^2 - x + 2), 1 \rangle \cdot 1 + \frac{1}{2} \langle x^2 - x + 2, (x-1) \rangle (x-1)$$

$$= \frac{1}{3}\left((0 - 0 + 2) \cdot 1 + (1^2 - 1 + 2) \cdot 1 + (2^2 - 2 + 2) \cdot 1\right) \cdot 1$$

$$+ \frac{1}{2}\left((0 - 0 + 2)(0-1) + (1^2 - 1 + 2)(1-1) + (2^2 - 2 + 2)(2-1)\right) \cdot (x-1)$$

$$= \frac{8}{3} \cdot 1 + (x-1) = x + \frac{5}{3}$$

$$S - S_F = x^2 - x + 2 - \left(x + \frac{5}{3}\right) = x^2 - 2x + \frac{1}{3}$$

On constate que $R - R_F = S - S_F$ et <u>la distance est alors la même</u> ce qui n'est pas étonnant car R et S diffère par un polynôme qui appartient à F.

Exercice 2.

1. Montrer qu'un endomorphisme orthogonal et diagonalisable d'un espace euclidien est une symétrie orthogonale.
2. Soit E un espace euclidien de dimension n et U, V deux vecteurs de E de même norme ($\|U\| = \|V\|$). On considère l'hyperplan $P \subset E$ orthogonal au vecteur $U - V$ et la réflexion $\sigma : E \to E$ par rapport à P.
   (a) Supposons $n = 2$. Trouver une base de $P \subset E$. (Indication : faire un dessin dans $\mathbb{R}^2$.)
   (b) On suppose n encore égal à 2. Dans la base de E constituée de la base de P completée par $U - V$ écrire la matrice de σ.
   (c) On suppose maintenant n quelconque. Déterminer $\sigma(U)$.

1. Soit φ - orthogonal alors dans toute base orthonormée A - la matrice de φ satisfait $A^{-1} = {}^tA$. Les valeurs propres réelles de φ orthogonal peuvent être que 1 et -1. Si en plus A est diagonalisable on a que 1 et -1 sur la diagonale et donc

$A = PDP^{-1}$ et comme $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ et avec 1 et -1 seules entrées possibles dans D on a $D = D^{-1}$ et $A = A^{-1}$; on conclut que $A = A^{-1} = {}^tA$ c.à.d. $A = A^T$ - symétrique!

2. $\|U\| = \|V\|$ $\quad P \perp U - V$

(a) Une base de P - on peut juste prendre $U+V$, c'est bien dans P car $U+V \perp U-V$ car $\langle U+V, U-V\rangle = \langle U,U\rangle + \langle V,U\rangle - \langle U,V\rangle - \langle V,V\rangle = 0$

avec $\langle U,U\rangle = \langle V,V\rangle$ on a ce qu'il faut.

(b) La matrice de σ est évidente : σ agit sur la base : $U+V \mapsto U+V$ et $U-V \mapsto -(U-V)$

cela donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\sigma(U) = V$ car $\begin{array}{l} U+V \mapsto U+V \\ U-V \mapsto -(U-V) \end{array}$ indépendamment de dimension

donc $U = \dfrac{(U+V)+(U-V)}{2} \mapsto \dfrac{(U+V)-(U-V)}{2} = V$

Exercice 3.
Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme inversible dont la matrice dans la base canonique est

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Comment sait-on sans calculer les valeurs propres de T que T est diagonalisable ? Citer le théorème du cours en question et écrir son énoncé.
2. Soit M_1 l'espace propre de valeur propre $\lambda_1 = -2$ de ϕ, engendré par le vecteur $v_1 = (1, a_1, b_1)$. Trouver les valeurs a_1, b_1.
3. Soit M_2 l'espace propre de valeur propre $\lambda_2 = 1$ de ϕ, engendré par le vecteur $v_2 = (1, a_2, b_2)$. Trouver les valeurs a_2, b_2.
4. Soit M_3 l'espace propre de valeur propre $\lambda_3 = 4$ de ϕ, engendré par le vecteur $v_3 = (1, a_3, b_3)$. Trouver les valeurs a_3, b_3.
5. Dans la base canonique trouver les matrices E_1, E_2, E_3 des projections orthogonales sur les sous-espaces M_1, M_2, M_3 respectivement.
6. Calculer $E_1 + E_2 + E_3$ et expliquer le resultat.
7. Écrire T comme combinaison linéaire de E_1, E_2, E_3, c'est-à-dire trouver les réels α, β, γ tels que $T = \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3$.
8. Trouver une matrice orthogonale P (c'est-à-dire satisfaisant $P^{-1} = {}^tP$) qui diagonalise la matrice T, donc telle que

$$T = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} {}^tP.$$

1 Par le thm. spectral toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

(Théorème spectral). Soit f un endomorphisme auto-adjoint. Alors f est diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit, il existe une base orthonormée qui consiste en des vecteurs propres de f.

ou bien

Théorème spectral pour les matrices — Soit A une matrice symétrique réelle alors il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale dont tous les coefficients sont réels, telles que la matrice A est égale à PDP-1.

2. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ - calcul simple avec $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Projection sur un vecteur v est égale à

$P_v = ({}^tv\, v)^{-1} v\, {}^tv$.

$v_1 {}^tv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ -2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$E_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $E_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On peut aussi trouver ces matrices en écrivant les projections de vecteurs de la base sur M_1, M_2, M_3. Par exemple, e_1, e_2, e_3 sur M_1 on calcule:

$$e_1 \mapsto \frac{\langle e_1, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e_2 \mapsto \frac{\langle e_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e_3 \longmapsto \frac{\langle e_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = -\frac{2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

D'où $E_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

etc.

6. $E_1 + E_2 + E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – Les matrices E_1, E_2, E_3 donnent les projections sur 3 droites M_1, M_2, M_3. Leur somme fait une décomposition d'un vecteur quelconque en combinaison linéaire de trois vecteurs $\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}$. Trois vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, et donc la somme $E_1 + E_2 + E_3 = Id$.

7. On remarque que $TE_1 = -2 \cdot E_1$, $TE_2 = 1 \cdot E_2$, $TE_3 = 4E_3$ car les colonnes de E_1 sont des vecteur propres de valeur propre -2 etc.

Comme $E_1 + E_2 + E_3 = Id$, on a pour $\forall v \in \mathbb{R}^3$

$Tv = T(E_1 + E_2 + E_3)(v) = (-2E_1 + 1 \cdot E_2 + 4E_3)v$

Donc $T = -2E_1 + 1E_2 + 4E_3$. En effet:

$$-2 \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Les colonnes dans la matrice orthogonale P sont données par les vecteurs de la base orthonormée formée par les vecteurs propres de T:

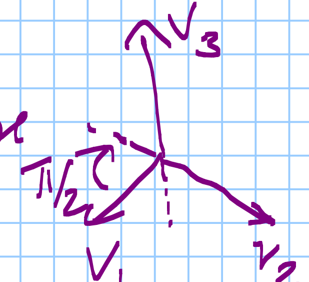
$$v_1 \mapsto \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix},\quad v_2 \mapsto \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad v_3 \mapsto \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Donc $P = \begin{pmatrix}1/\sqrt6 & 1/\sqrt3 & 1/\sqrt2\\ -1/\sqrt6 & -1/\sqrt3 & 1/\sqrt2\\ -2/\sqrt6 & 1/\sqrt3 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1 & \sqrt2 & \sqrt3\\ -1 & -\sqrt2 & \sqrt3\\ -2 & \sqrt2 & 0\end{pmatrix}$, ${}^tP = \frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ \sqrt2 & -\sqrt2 & \sqrt2\\ \sqrt3 & \sqrt3 & 0\end{pmatrix}$

et $T = \begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1 & \sqrt2 & \sqrt3\\ -1 & -\sqrt2 & \sqrt3\\ -2 & \sqrt2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ \sqrt2 & -\sqrt2 & \sqrt2\\ \sqrt3 & \sqrt3 & 0\end{pmatrix}$

Exercice 4.
On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté par la base canonique. Soit ρ la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe orienté et dirigé par le vecteur $v = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ et d'angle $\pi/2$.

1. Ecrire la matrice de ρ dans une base orthonormée directe dont le dernier vecteur est $\frac{v}{\|v\|}$.
2. Comment trouver la matrice de ρ dans la base canonique ? On ne demande pas la réponse numérique, il suffit d'expliquer en détail le procédé qui permet de trouver la matrice.



1. La matrice de ρ dans la base

$$A = \begin{pmatrix}\cos\pi/2 & -\sin\pi/2 & 0\\ \sin\pi/2 & \cos\pi/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. La matrice A est écrite dans une base orthonormée faite d'une base droite orthonormée du plan $\Pi \perp V$ complété par $\frac{V}{\|V\|}$. L'équation du plan Π: $x - 2y + 2z = 0$ c'est facile à trouver une b.o.n. dans ce plan en prenant deux vecteurs quelconques non colinéaire de Π et faire Gram-Schmidt.

Pour passer à la matrice de ρ dans la base canonique il faut trouver la matrice de passage P de la base canonique vers $\{f_1, f_2\}$ une bon de Π complétée par $\frac{V}{\|V\|}$ P ayant pour colonnes $\left(f_1,\ f_2,\ \frac{V}{\|V\|}\right)$. Puisque ses colonnes sont orthonormée on a $P^{-1} = {}^tP$ et matrice recherchée sera : $\boxed{PA\,{}^tP}$