Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Math IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1. On considère

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 4 < x^2 + y^2 < 9\}.$$

L'ensemble A est-il un ouvert, un fermé de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2.

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les parties $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$ et $\Gamma_f = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\}$ le graphe de la fonction f.
   a. Montrer que Δ et Γ_f sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.
   b. Montrer que $\Delta \cap \Gamma_f$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $B \subset \mathbb{R}$ une partie dense de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in B$, $f(x) = g(x)$. A l'aide de la caractérisation séquentielle de la densité de B, montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. On considère $E := C^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables sur $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie : pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.
On considère l'application N de E dans $\mathbb{R}$, définie par pour tout $f \in E$,

$$N(f) = \max\left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right).$$

1. Montrer que N définit une norme sur E.
2. Soit Φ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $f \in E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$,

   $$\Phi(f) = f'(0).$$

   Montrer que Φ est une application linéaire continue sur E muni de la norme N.
3. En déduire une majoration de $|||\Phi|||$.

   Indication : On rappelle que

   $$\begin{aligned} |||\Phi||| &= \sup\{|\Phi(f)|; f \in E \text{ tel que } N(f) = 1\} \\ &= \sup_{f \in E; N(f)=1} |\Phi(f)|. \end{aligned}$$

Exercice 1

1. A est-il un ouvert de $\mathbb{R}^2$?

   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 4 < x^2 + y^2 < 9\}$.

   Montrons que A est un ouvert.

   1ère méthode : On a $A = B_2(0_{\mathbb{R}^2}, 3) \setminus \overline{B_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 2) = B_2(0_{\mathbb{R}^2}, 3) \cap \left(\overline{B_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 2)\right)^c$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

   2ème méthode : Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = x^2 + y^2$.

   On a f est continue sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynômiale en x, y. Comme $A = f^{-1}(]4, 9[)$ avec f continue et $]4, 9[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ alors A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2. A est-il un fermé de $\mathbb{R}^2$?

   Considérons par exemple $u_n = (2 + \frac{1}{n}, 0)$. On a $u_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car

   $$4 < (2 + \frac{1}{n})^2 = 4 + \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n} \leq 4 + 1 + 1 = 6 < 9$$

   où on a utilisé le fait que $0 < \frac{1}{k} \leq 1$ pour tout $k \geq 1$.

   D'autre part $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}^2$ vers $u = \lim_n u_n = (\lim_n (2 + \dfrac{1}{n}), 0) = (2, 0) \notin A$ car $x_u^2 + y_u^2 = 4$.

   Par suite A n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$

Exercice 2

1. a. i) Montrons tout d'abord que $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = y\}$ est une fermé de $\mathbb{R}^2$.

   1ère méthode : Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = x - y$.

   On a f est continue sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynômiale en x, y. Comme $A = f^{-1}(\{0\})$ avec f continue et $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ alors Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

   2ème méthode : (Par critère séquentiel)

   Soit $(u_n)_n = ((x_n, y_n))_n$ une suite d'éléments de Δ qui converge dans $\mathbb{R}^2$ vers $u = (x, y)$. Montrons que $u \in \Delta$.

   On a $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} u \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x$ et $y_n \underset{n \to +\infty}{\to} y$ dans $\mathbb{R}$.

   D'autre part, $u_n \in \Delta \Rightarrow x_n = y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant dans cette égalité à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient $x = y$ et donc $u = (x, y) \in \Delta$.

   Par suite Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

   ii) Montrons maintenant que $\Gamma_f = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

   Soit $(u_n)_n = ((x_n, y_n))_n$ une suite d'éléments de Γ_f qui converge dans $\mathbb{R}^2$ vers $u = (x, y)$. Montrons que $u \in \Gamma_f$ càd que $y = f(x)$.

   On a tout d'abord pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \Gamma_f \Rightarrow y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Et $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} u \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x$ et $y_n \underset{n \to +\infty}{\to} y$ dans $\mathbb{R}$.

   Or f continue donc $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x \Rightarrow f(x_n) = y_n \underset{n \to +\infty}{\to} f(x)$. Par suite par unicité de la limite $y = f(x)$ et donc $u = (x, y) \in \Gamma_f$.

   D'où Γ_f est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

b. On a vu dans a. que Δ et Γ_f sont des fermés de $\mathbb{R}^2$, donc $\Delta \cap \Gamma_f$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que $\Delta \cap \Gamma_f$ est borné dans $\mathbb{R}^2$. Soit $u = (x, y) \in \Delta \cap \Gamma_f$. On a donc $y = x = f(x)$.

Or comme f est bornée alors il existe $M > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq M$. Par suite $\|u\|_\infty = \max(|f(x)|, |f(x)|) = |f(x)| \leq M$ pour tout $u = (x, y) \in \Delta \cap \Gamma_f$.

Donc $\Delta \cap \Gamma_f$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ qui est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension fini et par suite $\Delta \cap \Gamma_f$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme B est dense dans $\mathbb{R}$ alors il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de B qui converge vers x dans $\mathbb{R}$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B$ et $f = g$ sur B donc $f(x_n) = g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n g(x_n). \tag{1}$$

Or f, g sont continues sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en x. Comme $\lim\limits_n x_n = x$ alors $\lim\limits_n f(x_n) = f(x)$ et $\lim\limits_n g(x_n) = g(x)$. Par suite (1) nous donne

$$f(x) = g(x).$$

D'où $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ cà d $f = g$.

Exercice 3

1. On a pour tout $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$, $0 \leq N(f) < +\infty$ car f et f' sont continues sur $[0,1]$ donc bornées.

a. On a $N(0_E) = \max(0, 0) = 0$.

D'autre part $N(f) = 0 \iff \|f\|_\infty = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$. Donc en particulier $\|f\|_\infty = 0$ et par suite $f = 0_E$ car $\|.\|_\infty$ est une norme sur E .

D'où $N(f) = 0 \iff f = 0_E$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in E$. On a

$$\begin{aligned} N(\lambda f) &= \max(\|\lambda f\|_\infty, \|(\lambda f)'\|_\infty) \\ &= \max(|\lambda|\|f\|_\infty, \|\lambda f'\|_\infty) \\ &= \max(|\lambda|\|f\|_\infty, |\lambda|\|f'\|_\infty) \\ &= |\lambda| \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty) \\ &= |\lambda| N(f) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.

c. Soit $f, g \in E$. On a

$$N(f + g) = \max(\|f + g\|_\infty, \|(f + g)'\|_\infty) = \max(\|f + g\|_\infty, \|f' + g'\|_\infty). \tag{2}$$

Comme $\|.\|_\infty$ est une norme sur E, alors

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \leq N(f) + N(g). \tag{3}$$

Pareil

$$\|f' + g'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty \leq N(f) + N(g). \tag{4}$$

De (2) , (3) et (4) on déduit que

$$N(f + g) \leq N(f) + N(g).$$

Par suite N est une norme sur E.

2. a. Φ est linéaire car $\phi(0_E) = 0$ car si $f = 0_E : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ qui à x associe 0 alors $f' = 0$ sur $[0,1]$ et donc en particulier $f'(0) = 0$.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in E$. On a $\Phi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'(0) = \lambda f'(0) + g'(0) = \lambda\Phi(f) + \Phi(g)$.

   Par suite Φ est linéaire.

   b. Montrons que Φ est continue.

   On a $|\Phi(f)| = |f'(0)| \leq \|f'\|_\infty \leq N(f)$ pour tout $f \in E$, donc il existe $C = 1 > 0$ tel que $|\Phi(f)| \leq CN(f)$ pour tout $f \in E$. Cette inégalité avec le fait que Φ est linéaire nous donne que Φ est continue.

3. On rappelle que $|||\Phi||| = \sup\{|\Phi(f)|; f \in E \text{ tel que } N(f) = 1\} = \sup A$.

   Comme $|\Phi(f)| \leq N(f)$ pour tout $f \in E$, alors on déduit que $|||\Phi||| \leq 1$

Question Supplémentaire :

On désigne par s l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, définie pour $x \in [0,1]$ par

$$s(x) = \sin x.$$

Calculer $N(s)$ et en déduire des questions précédentes la norme de l'opérateur Φ.

On a $\|s'\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \cos x = \cos 0 = 1$ car cosinus est décroissante sur $[0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$.

Par suite $N(s) = \max(\|s\|_\infty, \|s'\|_\infty) = \max(\sin 1, 1) = 1$ ($\|s\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} \sin x = \sin 1$ car sinus est croissante sur $[0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$).

Notons que $\Phi(s) = s'(0) = \cos(0) = 1$.

En déduire $|||\Phi|||$?

On a déjà vu que $|||\Phi||| \leq 1$ donc 1 est un majorant de A.

D'autre part, comme $N(s) = 1$ avec $\Phi(s) = 1$ (alors $1 \in A$ et donc c'est le $\sup(A)$), on déduit que $|||\Phi||| = 1$.