Fiche 3

Exercice 1.

On considère le vecteur $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice P_1 de la projection orthogonale sur $\mathbf{a}$ et la matrice P_2 de la projection orthogonale sur un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{a}$.
2. Calculer $P_1 + P_2$ et $P_1 P_2$. Expliquer les resultats obtenus.

Exercice 2.

Déterminer la projection orthogonale du point $b = (2, 4, 4)$ sur la droite D passant par l'origine et parallele au vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de b à D.

Exercice 3.

Déterminer dans $\mathbb{R}^n$ l'angle du vecteur ${}^t(1, 1, ..., 1)$ avec les axes. Déterminer la matrice P de la projection orthogonale sur ce vecteur.

Exercice 4.

On se donne $v_1 = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Calculer la matrice de p_F, projecteur orthogonal sur F, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base B pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$.
3. Déterminer toutes les bases de R^3 pour lesquelles la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$.

Exercice 5.

Déterminer la matrice de la projection ortogonale de $\mathbb{R}^3$ sur l'intersection des plans d'équation $x + y + z = 0$ et $x - z = 0$.

Exercice 6.

Déterminer la solution $\hat{x}$ des moindres carrés des équations $3x = 10et4x = 5$. Vérifier que l'erreur commise est un vecteur orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.

Déterminer la matrice de la projection sur le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

Soit V le sous-0espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $a_1 = {}^t(1, 1, 0, 1)$ et $a_2 = {}^t(0, 0, 1, 0)$. Déterminer :

1. une base de supplementaire orthogonal $V^\perp$,
2. la matrice P de la projection orthogonale sur V,
3. le vecteur V de $V^\perp$, le plus proche du vecteur $b = {}^t(0, 1, 0, -1)$

Exercice 9.

Dans $\mathbb{R}^6$ soit $H = \{(x_1, \cdots, x_6) \in \mathbb{R}^6 |\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de $H^\perp$ puis la distance entre $u = {}^t(1, -1, 0, 2, 4, 0)$ et H.

Exercice 10. Hyperplan.

Un hyperplan dans l'espace vectoriel E c'est un sous-espace de E tel que sa dimension est égale à $(\dim E - 1)$.

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$< a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

On note H l'hyperplan suivant : $H = \{P(X) \in E |\ P(1) = 0\}$

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H puis la distance de X à H.

Exercice 11.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \cdots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$< P, Q >= \sum_{i=1}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. Vérifier qu'avec cette application, E est muni d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormé de E.
3. Pour $Q \in E$ quelconque, déterminer la distance de Q à $H = \{P \in E |\ \sum_{i=1}^{n} P(a_i) = 0\}$

Exercice 12.

Dans $Mat_n(\mathbb{R})$ on note $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques. On muni $Mat_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $< M, N >= \sum_{i,j} m_{ij}n_{ij}$ où m_{ij} sont des coefficients de M et n_{ij} sont ceux de N.

1. Vérifier que pour $M, N \in Mat_n(\mathbb{R})$, $< M, N >= \mathrm{tr}({}^tM \cdot N)$.
2. Soit $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$. Remarquer que $< {}^tS, {}^tA >=< S, A >$. En déduire que $< S, A >= 0$.
3. Déduire de la question précédente que $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}^\perp$ puis que $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$.
4. On conclut alors que $Mat_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$. Soit $M \in Mat_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'unique $S \in \mathcal{S}$ et l'unique $A \in \mathcal{A}$ en fonction de M telles que $M = S + A$.
5. Dans $Mat_2(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance entre M et $\mathcal{S}$, la distance entre M et $\mathcal{A}$, puis entre $p_{\mathcal{S}}(M)$ et $p_{\mathcal{A}}(M)$.