Analyse III

Fonctions de plusieurs variables

MAT2019L séquence 4

CM4

automne 2017

cours de
Francis Clarke

optimisation

Le problème abstrait

$$(\mathrm{P}) \quad \min_A f$$

Le problème abstrait

$$(\mathrm{P}) \quad \min_A f$$

Rappel

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

- Prouver qu'une solution de (P) existe;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions;
- Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.

L'importance en optimisation d'un théorème d'existence a priori vient de cette logique.

Cette logique fait défaut en absence d'un théorème d'existence

Le problème abstrait

$$(\mathrm{P}) \quad \min_A f$$

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

- Prouver qu'une solution de (P) existe;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions;
- Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.

Ce premier ingrédient est souvent fourni par le théorème de Weierstrass

Un résultat pionnier en topologie :

Théorème (de Weierstrass) Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où $A \subset \mathbb{R}^n$ est un compact non vide. Alors f atteint un minimum sur A, et atteint un maximum sur A.

Rq : On dit aussi que f atteint ses *extrémums*.

Le problème abstrait

$$(\text{P}) \qquad \min_A f$$

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

- Prouver qu'une solution de (P) existe;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions;
- Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.

Ce deuxième ingrédient passe par les dérivées...

Exemple Trouver les extrémums de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

par rapport à l'intervalle $[-3, 4]$.

Solution

f est un polynôme donc continue et dérivable partout.

On trouve les points critiques de f dans l'intervalle en question :

$$f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \implies x = -2 \text{ ou } x = 1$$

Le minimum de f sur l'intervalle, ainsi que le maximum, existent, par le théorème de Weierstrass (continuité + compacité)

Ils sont atteints soit sur la frontière, soit dans l'intérieur (en un point critique).

Les seuls candidats sont donc les points $-3, -2, 1, 4$.

Les seuls candidats sont donc les points $-3, -2, 1, 4$.

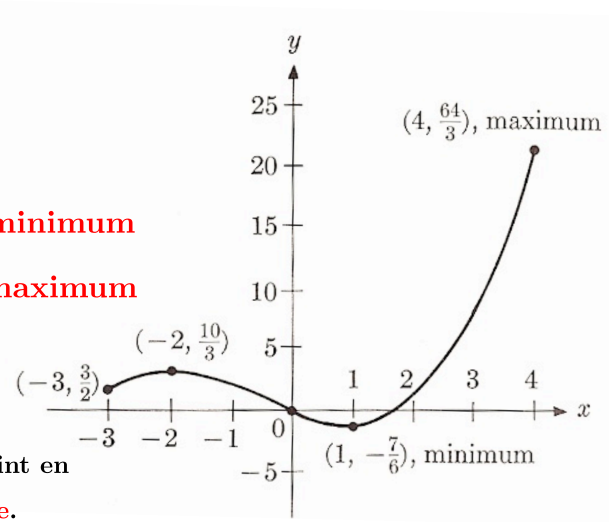
On calcule :

$f(-3) = \dfrac{3}{2}$

$f(-2) = \dfrac{10}{3}$

$f(1) = -\dfrac{7}{6}$ le minimum

$f(4) = \dfrac{64}{3}$ le maximum



Rq : le max est atteint en un point non critique.

Le point critique -2 ne donne ni le min ni le max.

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

Le problème abstrait

$$(\mathrm{P}) \quad \min_{A} f$$

- Prouver qu'une solution de (P) existe;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions;
- Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.

Optimisation élémentaire dans R^n :

pour $n = 1$, ceci veut dire un point x tel que $f'(x) = 0$

sachant qu'une solution existe, on examine les points critiques dans l'intérieur de A, et on étudie séparément la frontière de A

Rq : si Weierstrass s'applique, on trouvera aussi les points où le max est atteint ; donc, tous les extremums

Comment définir "point critique" pour une fonction de plusieurs variables ?

Les dérivées partielles

Définition

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables qui est définie dans un voisinage du point (a, b).

Lorsque la fonction partielle $x \mapsto f(x, b)$ est dérivable au point a, sa dérivée s'appelle la dérivée partielle de f par rapport à x, évaluée en a.

Elle est notée, par exemple, $\dfrac{\partial}{\partial x} f(a, b)$. Ou encore $f_x(a, b)$.

Donc on a

$$f_x(a, b) = \frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

De même pour la dérivée partielle en y ... et pour une fonction de trois variables, etc.

Notations diverses pour les dérivées partielles :

$$D_x f = D_1 f = \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x_1} f = f_x = f'_x = f'_1 = f_1$$

Trouver f_x, f_y quand $f(x,y) = e^{2x+7y} \sin y$. **exemple**

On calcule

$$f_x = 2e^{2x+7y} \sin y$$

$$f_y = 7e^{2x+7y} \sin y + e^{2x+7y} \cos y$$

Le gradient

Le *gradient* d'une fonction réelle f sur $\mathbb{R}^n$ va jouer un rôle central:

$$\nabla f := \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Convention Les points dans $\mathbb{R}^n$, lorsqu'ils interagissent avec des matrices/vecteurs, sont considérés comme des *colonnes*.

Une première application à l'optimisation : la règle de Fermat

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction qui est définie dans un voisinage d'un point (a,b) qui est un minimum local de f. On suppose en outre que le gradient de f en (a,b) existe.

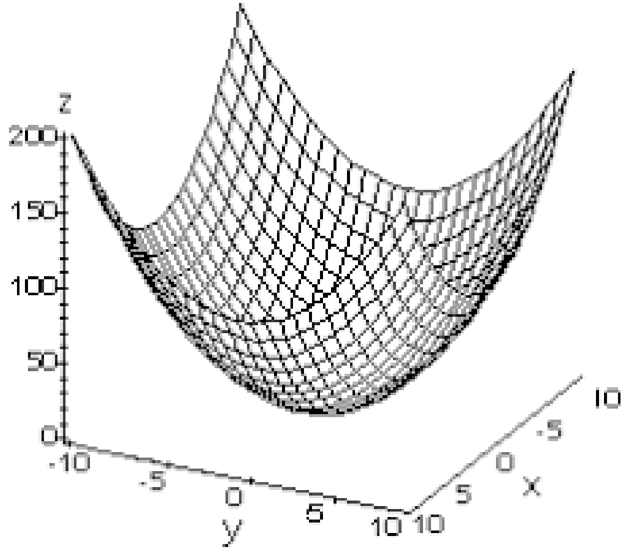
Alors on a

$$\nabla f(a,b) = \begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

minimum local en (a,b) : Il existe $r > 0$ tel que

$$\|(x,y) - (a,b)\| < r \implies f(x,y) \geq f(a,b).$$

Vocabulaire. Un point où le gradient s'annule est un point critique de f



Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction qui est définie dans un voisinage d'un point (a,b) qui est un minimum local de f. On suppose en outre que le gradient de f en (a,b) existe.

Alors on a

$$\nabla f(a,b) = \begin{bmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Démonstration. Fixons $y = b$. La fonction partielle $x \mapsto f(x,b)$ atteint un min local en $x = a$. Sa dérivée s'annule donc en ce point. C'est à dire, on a $f_x(a,b) = 0$.

De même, on a $f_y(a,b) = 0$, d'où $\nabla f(a,b) = (0,0)$ (ou $[0,0]^T$). ∎

version R^n

Théorème. Soit f une fonction qui est définie dans un voisinage d'un point x_* dans $\mathbb{R}^n$, où x_* est un minimum local de f. On suppose en outre que le gradient de f en x_* existe. Alors on a $\nabla f(x_*) = 0$.

<u>minimum local en x_*</u> :

Il existe une boule $B(x_*, r)$ telle que

$$x \in B(x_*, r) \implies f(x) \geq f(x_*).$$

Rq : même conclusion pour un maximum local : un max local est un point critique.

Il n'est **pas** dit qu'un point critique est un min ou un max

La *méthode déductive* applique le raisonnement suivant pour résoudre (P) :

Le problème abstrait

$$\text{(P)} \quad \min_A f$$

- Prouver qu'une solution de (P) existe;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions;
- Comparer les points trouvés afin de découvrir la (ou les) solutions.

Optimisation élémentaire dans R^n :

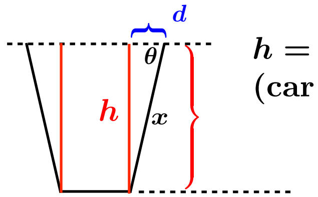
pour n quelconque, ceci veut dire un point x où toutes les dérivées partielles s'annulent

sachant qu'une solution existe, on examine les points critiques dans l'intérieur de A, et on étudie séparément la frontière de A

Exemple : problème du caniveau

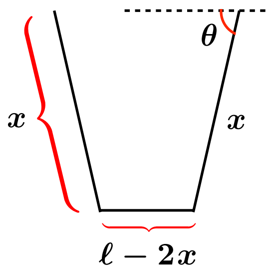
Exemple: design d'un caniveau

largeur du matériau (à plier) $= \ell$



$h = x \sin\theta$
(car $\sin\theta = h/x$)

de même
$d = x\cos\theta$



aire du triangle $=$
$\frac{1}{2} h d = \frac{1}{2} x^2 \sin\theta\cos\theta$

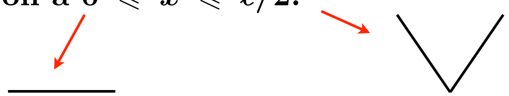
aire du reste (un rectangle)
$= (\ell - 2x)h = (\ell - 2x)x\sin\theta$

aire totale de la coupe transversale
$= 2 \times \frac{1}{2} x^2 \sin\theta\cos\theta + (\ell - 2x)x\sin\theta$
$= \underbrace{x\sin\theta[\ell - 2x + x\cos\theta]}_{\text{la fonction } f(x,\theta) \text{ à maximiser}}$

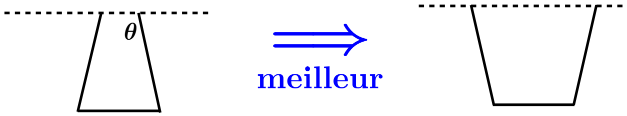
la fonction $f(x, \theta)$ à maximiser

Mais sur quel domaine?

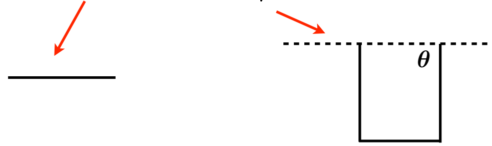
Pour la variable x, on a $0 \leqslant x \leqslant \ell/2$.



On remarque que $\theta > \pi/2$ est sans intérêt:



Donc pour θ, on considère $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.



Conclusion: Le domaine pertinent est le pavé

$$A = \{(x,\theta) \in [0,\ell/2] \times [0,\pi/2]\}.$$

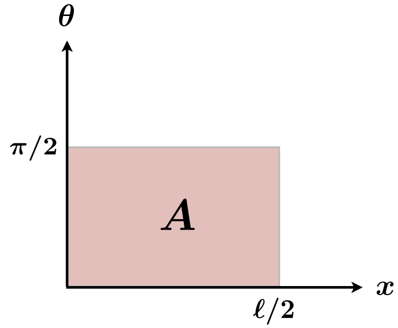
Le problème de design équivaut à maximiser

$$f(x,\theta) = x \sin\theta[\ell - 2x + x\cos\theta]$$

sur le pavé $A = [0,\ell/2] \times [0,\pi/2]$.

Puisque f est continue et A est compact, une solution existe, par le théorème.

Comment la trouver?



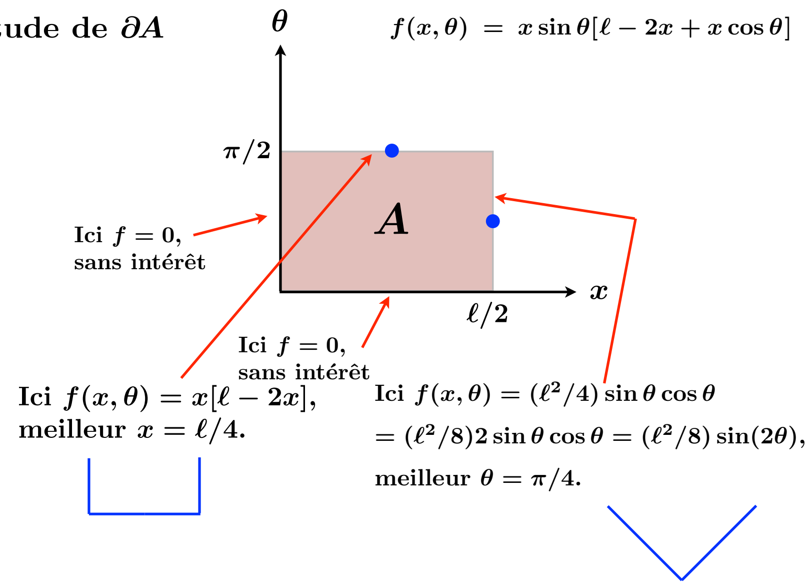
1) On étudie la frontière ∂A de A.

2) On trouve les points critiques de f dans $\operatorname{int} A$.

3) On compare les candidats ainsi identifiés.

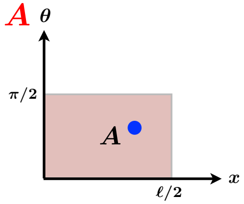
Il s'agit d'appliquer la méthode déductive.

Etude de ∂A



$$
\begin{aligned}
f(x,\theta) &= x\sin\theta[\ell-2x+x\cos\theta]\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \sin\theta[\ell-2x+x\cos\theta]+x\sin\theta[-2+\cos\theta]\\
&= \sin\theta\{\ell-4x+2x\cos\theta\}\\
\frac{\partial f}{\partial \theta} &= x\cos\theta[\ell-2x+x\cos\theta]+x\sin\theta[-x\sin\theta]\\
&= x\{\ell\cos\theta-2x\cos\theta+x\cos^2\theta-x\sin^2\theta\}
\end{aligned}
$$

Etude de $\operatorname{int} A$



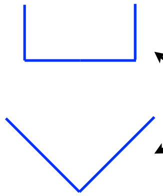
On pose $\nabla f(x,\theta)=0$:

$\sin\theta\{\ell-4x+2x\cos\theta\}=0$

$x\{\ell\cos\theta-2x\cos\theta+x\cos^2\theta-x\sin^2\theta\}=0$

Puisque $x\neq 0$ et $\sin\theta\neq 0$ (car on est dans $\operatorname{int} A$) ceci $\Longrightarrow\ \ell = 2x(2-\cos\theta)$.

On substitue dans l'autre équation pour trouver $2x\cos\theta = x$



Aire $=\ell^2/8$

Aire $=(\sqrt{3}/12)\ell^2$

le gagnant

L'optimisation et la méthode déductive : un autre exemple

Exemple

$\boxed{\text{Trouver le minimum de } x^3y^2(x+y-1) \text{ sur le pavé } \{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}.}$

une solution existe!

Pour résoudre le problème $\min_A f$, la *méthode déductive* applique le raisonnement suivant :

- Prouver qu'une solution existe (c-à-d, que le minimum est atteint) ;
- Étudier les conditions nécessaires afin d'identifier les éventuelles solutions, c-à-d, trouver les candidats ;
- Comparer les candidats afin de découvrir la (ou les) solutions.

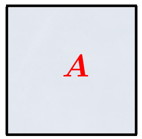
Cette logique fait défaut en absence du théorème d'existence

Exemple

$\boxed{\text{Trouver le minimum de } x^3y^2(x+y-1) \text{ sur le pavé } \{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}.}$

une solution existe!

comment la trouver?



1) On étudie la frontière ∂A de A.

2) On trouve les points critiques de f dans $\operatorname{int} A$.

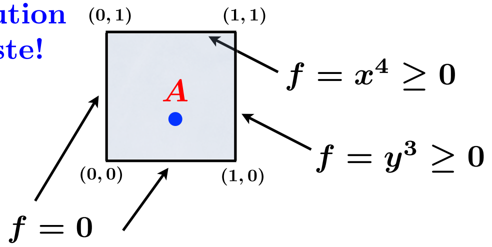
3) On compare les candidats ainsi identifiés.

Il s'agit d'appliquer la méthode déductive.

Exemple

Trouver le minimum de $x^3y^2(x+y-1)$ sur le pavé $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

une solution existe!



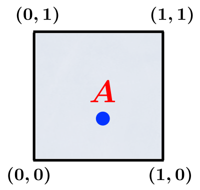
min dans ∂A? Mais le min est < 0

Donc le min n'est pas dans ∂A

Exemple

Trouver le minimum de $x^3y^2(x+y-1)$ sur le pavé $\{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

une solution existe!



Points critiques dans $\operatorname{int} A$:

$$3x^2y^2(x+y-1) + x^3y^2 = 0$$
$$2x^3y(x+y-1) + x^3y^2 = 0$$

$$\Longrightarrow 3(x+y-1) + x = 0$$
$$\Longrightarrow 2(x+y-1) + y = 0$$

$$\Longrightarrow 2x+3y = 2,\ 4x+3y = 3$$
$$\Longrightarrow \underbrace{x = 1/2,\ y = 1/3}_{\text{forcément le min}} \quad (\text{dans } A)$$

Donc le min n'est pas dans ∂A

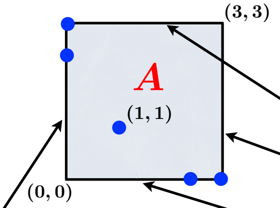
L'optimisation et la méthode déductive : encore un exemple

Exemple

Trouver le minimum de $x^2+y^2+3xy-5x-5y$ sur le pavé $\{0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3\}$.

1) une solution existe par Weierstrass (f continue, A compact)

2) points critiques dans $\operatorname{int} A$: $2x+3y=5$, $3x+2y=5$ $\Longrightarrow x=1,\ y=1$



3) étude de $\operatorname{fr} A$:

$f(x,3) = x^2+4x-6$
$\Longrightarrow \min_{[0,3]} f(x,3) = -6$ (en $x=0$, car $f'_x > 0$)

$f(3,y) = y^2+4y-6$
$\Longrightarrow \min_{[0,3]} f(3,y) = -6$ (en $y=0$, car $f'_y > 0$)

$f(x,0) = x^2-5x$
$\Longrightarrow \min_{[0,3]} f(x,0) = -\frac{25}{4}$ (en $\frac{5}{2}$, où $f'_x = 0$)

$f(0,y) = y^2-5y$
$\Longrightarrow \min_{[0,3]} f(0,y) = -\frac{25}{4}$ (en $\frac{5}{2}$, où $f'_y = 0$)

4) comparaison :

$f(1,1) = -5$, $f(3,0) = f(0,3) = -6$
$f(\frac{5}{2},0) = f(0,\frac{5}{2}) = -\frac{25}{4}$

$\Longrightarrow$ le minimum est atteint en deux points, $(0,\frac{5}{2})$ et $(\frac{5}{2},0)$.

Il vaut $-\frac{25}{4}$.

Un théorème d'existence plus général

On a vu le danger d'utiliser la méthode déductive en absence d'un théorème d'existence

Théorème de Weierstrass

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact (fermé et borné) dans $\mathbb{R}^n$.

Si f est continue et A est non vide, alors le problème $\boxed{\min_A f}$ admet une solution.

min
ou
max

Un théorème d'existence plus général (pour le min) :

Théorème Soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$, et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation (P) qui consiste à $\boxed{\text{minimiser } f}$ par rapport à A. Soit $\bar{x} \in A$, et posons

$$E := \{x \in A : f(x) \leqslant f(\bar{x})\}$$

Si l'ensemble de sous-niveau E est compact, et si f est continue sur E, alors (P) admet une solution x_*.

Théorème Soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$, et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation (P) qui consiste à minimiser f par rapport à A. Soit $\bar{x} \in A$, et posons

$$E := \{x \in A : f(x) \leqslant f(\bar{x})\}$$

Si l'ensemble de sous-niveau E est compact, et si f est continue sur E, alors (P) admet une solution x_*.

Rq : E est fermé lorsque A est fermé et $f : A \to \mathbb{R}$ est continue.

Preuve : On vérifie que E est stable sous les limites de suites.

Soit (x_i) une suite dans E qui converge vers une limite x. Alors (x_i) est une suite dans le fermé A, donc sa limite $x \in A$.

De plus, on a $\lim f(x_i) = f(x)$ car f est continue en x. Puisque $f(x_i) \leq f(\bar{x})\ \forall\, i$, on en déduit $f(x) \leq f(\bar{x})$. Du coup, $x \in E$. ∎

C'est généralement de prouver que E est borné qui est l'enjeu principal lorsque l'on utilise ce théorème

Théorème Soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$, et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation (P) qui consiste à minimiser f par rapport à A. Soit $\bar{x} \in A$, et posons

$$E := \{x \in A : f(x) \leqslant f(\bar{x})\}$$

Si l'ensemble de sous-niveau E est compact, et si f est continue sur E, alors (P) admet une solution x_*.

Rq : Le théorème de Weierstrass (pour le min) est un corollaire de celui-ci :

sous les hypothèses de Weierstrass, E est fermé par la remarque précédente, et borné parce que E est compris dans A qui est compact.

Théorème Soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$, et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation (P) qui consiste à minimiser f par rapport à A. Soit $\bar{x} \in A$, et posons

$$E := \{x \in A : f(x) \leqslant f(\bar{x})\}$$

Si l'ensemble de sous-niveau E est compact, et si f est continue sur E, alors (P) admet une solution x_*.

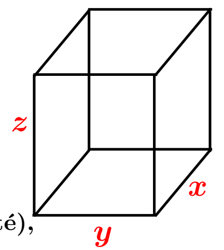
Démonstration :

On sait par Weierstrass que f admet un minimum par rapport à E, disons en un point x_*. On observe que $f(x_*) \leq f(\bar{x})$, car $\bar{x} \in E$. On a aussi $x_* \in A$, puisque $E \subset A$.

On prouve maintenant qu'en fait, x_* minimise f par rapport à A.

Soit $x \in A$ un point quelconque. Si x appartient à E, alors $f(x_*) \leq f(x)$, puisque x_* minimise f par rapport à E. Si x n'appartient pas à E, alors $f(x) > f(x_*)$ forcément. Dans tous les cas, on trouve $f(x) \geq f(x_*)$, montrant que x_* minimise f sur A. ■

Exemple On cherche à construire un caisson de 20 m^3; le matériau pour les côtés coute 1 euro/m^2; pour le fond 2; pour le couvercle 3. Quel est le caisson le moins chère?



On observe qu'il s'agit de minimiser

$$C(x, y, z) = 2xz+2yz+2xy+3xy = 2xz+2yz+5xy$$

sur $\operatorname{int} \mathbb{R}^3_+$, sous la contrainte $xyz = 20$.

En remplaçant z par $20/xy$ (d'après la contrainte égalité), on obtient le problème d'optimisation suivant :

$$\boxed{\min f(x,y) = \frac{40}{y} + \frac{40}{x} + 5xy \text{ sur } \operatorname{int} \mathbb{R}^2_+}$$

A

Ici, f est continue sur A, mais ce dernier n'est pas compact. Weierstrass ne s'applique donc pas.

$$\boxed{\min f(x,y) = \frac{40}{y} + \frac{40}{x} + 5xy \text{ sur } \operatorname{int} \mathbb{R}^2_+} \quad A$$

Supposons que nous décidons de procéder déductivement malgré l'incertitude sur l'existence, en posant le gradient égal à zéro...

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 5y - \frac{40}{x^2} \\ 5x - \frac{40}{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x^2 y = x y^2 \Longrightarrow x = y,$$

Ensuite on obtient $5x = 40/x^2$ $\Longrightarrow x^3 = 8 \Longrightarrow x = 2$.

Il vient $z = 20/xy = 5$, et le caisson optimal est $2 \times 2 \times 5$.

S'il existe !!

On complète l'argument en montrant comment le nouveau théorème d'existence s'applique à cet exemple.

$$\boxed{\min f(x,y) = \frac{40}{y} + \frac{40}{x} + 5xy \text{ sur } \operatorname{int} \mathbb{R}^2_+} \quad A$$

Théorème Soit A une partie dans $\mathbb{R}^n$, et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème d'optimisation (P) qui consiste à minimiser f par rapport à A. Soit $\bar{x} \in A$, et posons

$$E := \{x \in A : f(x) \leqslant f(\bar{x})\}$$

Si l'ensemble de sous-niveau E est compact, et si f est continue sur E, alors (P) admet une solution x_*.

En prenant pour $\bar{x}$ le point $(1, 1)$ (par exemple), l'ensemble E devient

$$\left\{(x,y) \in \operatorname{int} \mathbb{R}^2 : \frac{40}{y} + \frac{40}{x} + 5xy \leq f(1,1) = 85\right\}$$

On observe que f est continue sur E ; avec ces bornes on déduit aisément que E est fermé, par le critère de stabilité des suites.
Il reste à prouver que E est borné.

$$(x,y) \in E \Longrightarrow \frac{40}{x} \leq 85 \Longrightarrow x \geq \frac{40}{85}$$

et de même $y \geq 40/85$.

Ensuite

$$5xy \leq 85 \Longrightarrow x \leq \frac{85}{5y} = \frac{17}{y} \leq 17 \times \frac{85}{40}$$

et de même pour y.

Donc E est compris dans un certain pavé, et, par conséquent, est borné.

Les classes C et C¹

Les classes C(U) et C¹(U)

Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

Lorsque f est continue dans U (c-à-d, en chaque point de U), on dit que f appartient à $C(U)$.

(Parfois on écrit $C^0(U)$.)

Lorsque f est continue et toutes ses dérivées partielles d'ordre un (c-à-d, chaque f_{x_i} ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}$) existent et sont continues (sur U), on dit que f appartient à $C^1(U)$.

On dit aussi que f est continûment dérivable

Par exemple, une fonction $f(x,y)$ de deux variables appartient à $C^1(\mathbb{R}^2)$ quand les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

existent pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et les deux fonctions

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \ (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

sont continues en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

exemple

Soit $f(x,y) = e^{2x+7y} \sin y$. Il est clair que $f \in C(\mathbb{R}^2)$.

On a calculé

$$f_x = 2e^{2x+7y} \sin y\,, \quad f_y = 7e^{2x+7y} \sin y + e^{2x+7y} \cos y,$$

d'où, visiblement, l'appartenance de f à la classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Fin du quatrième cours