Examen final du 10 mai 2017-durée 3h

Le sujet est imprimé sur une page resto-verso. La qualité de la rédaction sera prise en compte lors de la correction. Documents, téléphones portables et calculatrices sont interdits. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1. (6 points)

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$
2. Montrer qu'il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = Vect(a)$, déterminer un vecteur qui convient.
3. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$
   a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$
   b. En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $Im(f)$.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$
5. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$
6. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $Im(f)$.
7. A-t-on $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$?

Correction exercice 1.

1. Les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ sont

$$\begin{pmatrix} 6x - 4y - 4z \\ 5x - 3y - 4z \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donc

$$mat_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$u = (x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 4z = 0 \\ 5x - 3y - 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4x - 4z = 0 \\ 5x - 3x - 4z = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x}{2} \\ y = x \end{cases}$$

Donc $u = \left(x, x, \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}(2,2,1)$

On pose alors $a = (2,2,1)$ et $\ker(f) = Vect(a)$

3.

a.

$b = (1,1,0)$ donc

$$f(b) = (6 \times 1 - 4 \times 1 - 4 \times 0, 5 \times 1 - 3 \times 1 - 4 \times 0, 1 - 1) = (2,2,0) = 2(1,1,0) = 2b$$

$$c = (0,1,-1) = e_2 - e_3$$

Donc

$$f(c) = (6 \times 0 - 4 \times 1 - 4 \times (-1), 5 \times 0 - 3 \times 1 - 4 \times (-1), 0 - 1) = (0,1,-1) = c$$

b.

$$b = \frac{1}{2} f(b) = f\left(\frac{b}{2}\right) \in Im(f) \quad \text{et} \quad c = f(c) \in Im(f)$$

Comme b et c ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre de $Im(f)$.

D'autre part, d'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Donc $\dim\big(Im(f)\big) = 2$, une famille libre à deux éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 est une base.

4. Soit α, β, γ trois réels

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(2,2,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,-1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

La famille $\{a, b, c\}$ est une famille libre à trois éléments dans un espace de dimension trois, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

5.

$$mat_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Car $f(a) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f(b) = 2b$ et $f(c) = c$

6. $\{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, $\{a\}$ est une base de $\ker(f)$ et $\{b, c\}$ est une base de $Im(f)$ donc $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2. (4 points)

On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f_\alpha(e_1) = e_1 + e_2 + 2e_3$$
$$f_\alpha(e_2) = e_1 + e_2 + \alpha e_3$$
$$f_\alpha(e_3) = e_1 + 2e_3$$

1. Donner la matrice A représentative de f_α dans la base $\mathcal{B}$.
2. Calculer, lorsqu'elle existe, la matrice inverse de la matrice A.
3. Pour quelles valeurs de α, β f_α est-il un isomorphisme ?

Correction exercice 2.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_3 = y_2 - y_1 \\ (\alpha - 2)x_2 = y_3 - 2y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 + y_1 \\ x_3 = y_1 - y_2 \\ (\alpha - 2)x_2 = y_3 - 2y_1 \end{cases}$$

Si $\alpha = 2$ alors A n'est pas inversible.
Si $\alpha \neq 2$ alors

$$x_2 = \frac{1}{\alpha - 2}(-2y_1 + y_3)$$

Et

$$x_1 = -x_2 - x_3 + y_1 = -\frac{1}{\alpha - 2}(-2y_1 + y_3) - y_1 + y_2 + y_1 = -\frac{1}{\alpha - 2}(-2y_1 - (\alpha - 2)y_2 + y_3)$$

Alors

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\alpha - 2}(2y_1 + (\alpha - 2)y_2 - y_3) \\ x_2 = \frac{1}{\alpha - 2}(-2y_1 + y_3) \\ x_3 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha - 2} & 1 & \frac{-1}{\alpha - 2} \\ \frac{-2}{\alpha - 2} & 0 & \frac{1}{\alpha - 2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Pour $\alpha \neq 2$ f_α est un isomorphisme.

Exercice 3. (4 points)

1. Trouver les solutions de l'équation différentielle
$$y'' + y' - 2y = -3e^{2t} + 1$$
2. Exprimer la solution y telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Correction exercice 3.

1. L'équation homogène est
$$y'' + y' - 2y = 0$$
Son équation caractéristique est :
$$r^2 + r - 2 = 0$$
Ses racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$
Sa solution générale est :
$$y = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-2t}$$
Une solution particulière de $y'' + y' - 2y = 1$ et $y_{P_1} = -\frac{1}{2}$
Une solution particulière de $y'' + y' - 2y = -3e^{-2t}$ est de la forme
$$y_{P_2} = Ate^{-2t}$$
$$y'_{P_2} = A(-2te^{-2t} + e^{-2t}) = A(-2t + 1)e^{-2t}$$
$$y''_{P_2} = A(-2e^{-2t} - 2(-2t + 1)e^{-2t}) = A(4t - 4)e^{-2t}$$
Donc
$$y''_{P_2} + y'_{P_2} - 2y_{P_2} = -3e^{2t} \Leftrightarrow A(4t - 4)e^{-2t}e^{2t} + A(-2t + 1)e^{-2t}e^{2t} - 2Ate^{-2t} = -3e^{2t} \Leftrightarrow -3A = -3 \Leftrightarrow A = 1$$
Par conséquent une solution particulière de $y'' + y' - 2y = -3e^{2t} + 1$ est :
$$y_P = -\frac{1}{2} + te^{-2t}$$
Et sa solution générale est
$$y = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-2t} - \frac{1}{2} + te^{-2t}$$

2.

$$y' = \lambda_1 e^t - 2\lambda_2 e^{-2t} + e^{-2t} - 2te^{-2t}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2} = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2} \\ 3\lambda_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\ \lambda_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{3} e^t + \frac{1}{6} e^{-2t} - \frac{1}{2} + te^{-2t}$$

Exercice 4. (4 points)

1. A l'aide du changement de variable $u = \ln(x)$, d'intégrations par partie bien choisies, calculer
$$\int_1^e (\ln(x))^2 dx$$
2. Donner le domaine de définition et déterminer les primitives de $x \longmapsto \frac{x^3}{x^2+2x+2}$.

Correction exercice 4.

1. Si $u = \ln(x)$ alors $x = e^u$ donc $dx = e^u du$

$$x = 1 \Rightarrow u = 0$$
$$x = e \Rightarrow u = \ln(e) = 1$$
$$I = \int_1^e (\ln(x))^2 dx = \int_0^1 u^2 e^u du$$

$\int_0^1 u^2 e^u du$
$f'(u) = e^u \qquad f(u) = e^u$
$g(u) = u^2 \qquad g'(u) = 2u$
$I = [u^2 e^u]_0^1 \qquad -2\int_0^1 ue^u du$

Donc

$$I = e - 2\int_0^1 ue^u du$$

On pose

$$J = \int_0^1 ue^u du$$

$J = \int_0^1 ue^u du$
$f'(u) = e^u \qquad f(u) = e^u$
$g(u) = u \qquad g'(u) = 1$
$J = [ue^u]_0^1 \qquad -\int_0^1 e^u du$

Donc

$$J = e - 2\int_0^1 e^u du = e - [e^u]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

Par conséquent

$$I = e - 2$$

2. $x^2 + 2x + 2$ a pour discriminant $\Delta = -4$ donc la fraction est définie sur $\mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 & x^2+2x+2 \\ \cline{2-2}
x^3+2x^2+2x & x-2 \\ \cline{1-1}
\quad -2x^2-2x & \\
\quad -2x^2-4x-4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 2x+4 &
\end{array}
$$

Donc

$$\frac{x^3}{x^2+2x+2} = x-2+\frac{2x+4}{x^2+2x+2}$$

Par conséquent

$$\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}dx = \int \left(x-2+\frac{2x+4}{x^2+2x+2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{2x+4}{(x+1)^2+1}dx$$

On fait le changement de variable $t = x+1$ dans l'intégrale, donc $x = t-1$ et $dx = dt$

$$\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{2(t-1)+4}{t^2+1}dt = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{2t+2}{t^2+1}dt$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{2t}{t^2+1}dt + 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(t^2+1) + 2\arctan(t) + K$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2\arctan(x+1) + K$$

Exercice 5. (4 points)

Soit h l'application définie par

$$h(x) = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}\ln(1+x)$$

1. Donner le domaine de définition de h.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ au voisinage de 0 et en déduire le développement limité de $h(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
3. Donner l'équation de la tangente au graphe de h au point $(0,0)$, et précisez la position de la tangente par rapport à sa tangente en ce point.

Correction exercice 5.

1. x^2+2x+2 a un discriminant négatif donc $x \longmapsto \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et $x \longmapsto \ln(1+x)$ est définie sur $]-1,+\infty[$ donc h est définie sur $]-1,+\infty[$.
2.

$$
\begin{array}{l|l}
2+2x+\qquad o(x^2) & 2+2x+x^2 \\ \cline{2-2}
2+2x+x^2 & 1-\frac{1}{2}x^2 \\ \cline{1-1}
\qquad -x^2+o(x^2) & \\
\qquad -x^2+o(x^2) & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad o(x^2) &
\end{array}
$$

Donc

$$\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Comme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$h(x)=\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^3)\right)$$
$$=x\left(1-\frac{x}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^2+o(x^2)\right)=x\left(1-\frac{x}{2}-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)$$
$$=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

3. $y=x$ est une équation de la tangente au point $(0,0)$

$$h(x)-x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)=x^2\left(-\frac{1}{2}-\frac{x}{6}+o(x^3)\right)<0$$

Au voisinage de $x=0$ donc la courbe est au-dessous de la tangente au voisinage de ce point.

Exercice 6. (3 points)

On rappelle que pour tout $a\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$

$$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

1. Montrer que $0<\arctan\left(\frac{1}{3}\right)<\frac{\pi}{4}$
2. Prouver que $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)=\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$.

Correction exercice 6.

1.

$$0<\frac{1}{3}<1\Rightarrow\arctan(0)<\arctan\left(\frac{1}{3}\right)<\arctan(1)\Rightarrow 0<\arctan\left(\frac{1}{3}\right)<\frac{\pi}{4}$$

Car arctan est strictement croissante.

2.

Comme

$$\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{2\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1-\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

De plus

$$0<\arctan\left(\frac{1}{3}\right)<\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0<2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)<\frac{\pi}{2}$$

Et

$$0<\arctan\left(\frac{3}{4}\right)<\frac{\pi}{2}$$

Ce qui montre que

$$2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)=\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$$

Exercice 7. (3 points)

Soit α,β des réels strictement positifs. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\alpha+k\beta}$$

Montrer que S_n est convergente et calculer sa limite (on pourra faire apparaitre une somme de Riemann).

Correction exercice 7.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha + k\beta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(\alpha + \frac{k}{n}\beta\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha + \frac{k}{n}\beta}$$

Il s'agit d'une somme de Riemann qui tend vers

$$\int_0^1 \frac{dx}{\alpha + \beta x} = \left[\frac{1}{\beta}\ln(\alpha + \beta x)\right]_0^1 = \frac{1}{\beta}\ln(\alpha + \beta) - \frac{1}{\beta}\ln(\alpha) = \frac{1}{\beta}\ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$