Université Claude Bernard-Lyon 1/Licence sciences et technologie
MAT1009L/Unité d'enseignement « Intégration et approximation »
Contrôle continu final/Mardi 31 mai 2016/Durée 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, et l'utilisation de téléphone sera considérée comme tentative de fraude (y compris pour regarder l'heure).

Exercice 1.

On considère la fonction $f(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$

(a) Déterminer l'ensemble de définition de f

(b) Déterminer la dérivée $f'(x)$ de f aux points $x > 0$ où c'est possible.

(c) Evaluer

$$J = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(x)dx$$

En explicitant la réponse autant que possible.

Correction exercice 1.

(a) On pose $u(x) = 2x^2 - 1$

$$1 - \left(u(x)\right)^2 = 1 - (2x^2 - 1)^2 = 1 - (4x^4 - 4x^2 + 1) = 4x^2 - 4x^4 = 4x^2(1 - x^2)$$

$$-1 \le u(x) \le 1 \Leftrightarrow 1 - \left(u(x)\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$$

Donc $D_f = [-1,1]$

(b) Pour $x > 0$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - \left(u(x)\right)^2}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2(1 - x^2)}} = \frac{4x}{2\sqrt{x^2}\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Car pour $x \in]0,1[$, $|x| = x$

(c) A l'aide d'une intégration par partie

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$J = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 1 \times f(x)dx$$

$J = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 1 \times f(x)dx$

$u'(x) = 1$ $\qquad$ $u(x) = x$

$v(x) = \arcsin(2x^2 - 1)$ $\qquad$ $v'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

$J = [x \arcsin(2x^2 - 1)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Soit on voit directement qu'une primitive de $x \to \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 2x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ est $x \to -2(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

Et alors

$$J = [x \arcsin(2x^2 - 1)]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 2\left[(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\arcsin\left(2 \times \frac{3}{4} - 1\right) - 0 + 2\left(\sqrt{1 - \frac{3}{4}} - 1\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{6} - 1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - 1$$

Soit on fait le changement de variable $t = x^2$, alors $dt = 2xdx$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow t=\frac{3}{4}$$

$$J=\left[x\arcsin(2x^2-1)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{dt}{\sqrt{1-t}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\arcsin\left(2\times\frac{3}{4}-1\right)-0-\int_0^{\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)-\left[-2(1-t)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\pi}{6}+2\left(\sqrt{1-\frac{3}{4}}-1\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}+2\left(\sqrt{\frac{1}{4}}-1\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{12}-1$$

Exercice 2.

(a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f exprimée par la formule

$$f(t)=\frac{t-2}{t^2-2t+2}$$

(b) Trouver les primitives de f .

(c) Etudier la convergence de l'intégrale généralisée (ou impropre)

$$K=\int_0^{+\infty}f(t)dt$$

Correction exercice 2.

(a)

$$f(t)=\frac{t-2}{t^2-2t+2}=\frac{t-2}{(t-1)^2+1}$$

Comme $(t-1)^2+1\geq 1>0$ la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

(b)

$$\int f(t)dt=\int\frac{t-2}{(t-1)^2+1}dt$$

On fait le changement de variable $x=t-1\Leftrightarrow t=x+1$

$$dt=dx$$

$$\int f(t)dt=\int\frac{x+1-2}{x^2+1}dx=\int\frac{x-1}{x^2+1}dx=\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan(x)+K,\ \ K\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{1}{2}\ln((t-1)^2+1)-\arctan(t-1)+K,\ \ K\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2-2t+2)-\arctan(t-1)+K,\ \ K\in\mathbb{R}$$

(c) Première méthode

$$\frac{t-2}{t^2-2t+2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{t}$$

Or $t\to\frac{1}{t}$ est une fonction de Riemann non intégrable en $+\infty$

Donc K diverge

Deuxième méthode

$$K(X)=\int_0^X f(t)dt=\left[\frac{1}{2}\ln(t^2-2t+2)-\arctan(t-1)\right]_0^X$$

$$=\frac{1}{2}\ln(X^2-2X+2)-\arctan(X-1)-\left(\frac{1}{2}\ln(2)-\arctan(1)\right)\xrightarrow[X\to+\infty]{}+\infty$$

Donc K diverge

Exercice 3.

1. Soit $p>0$ un paramètre fixé. Montrer (sans la calculer) que l'intégrale

$$I=\int_{\ln(2)}^{+\infty}\frac{dx}{(e^x-1)^p}$$

Est convergente

2. A l'aide du changement de variable $t=\sqrt{e^x-1}$, calculer une primitive de la fonction f définie par
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$$
3. En déduire la valeur de $I_{\frac{1}{2}}$

Correction exercice 3.

1.
$$x^2\times\frac{1}{(e^x-1)^p}\underset{+\infty}{\sim}x^2e^{-px}$$
$$\lim_{x\to+\infty}x^2\times\frac{1}{(e^x-1)^p}=0$$
Par croissance comparée

$2>1$, d'après les règles de Riemann l'intégrale est convergente en $+\infty$

2.
$$t=\sqrt{e^x-1}\Leftrightarrow t^2=e^x-1\Leftrightarrow e^x=t^2+1\Leftrightarrow x=\ln(t^2+1)\Rightarrow dx=\frac{2tdt}{t^2+1}$$
$$\int\frac{1}{t}\times\frac{2tdt}{t^2+1}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\arctan(t)+K=2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)+K,\quad K\in\mathbb{R}$$
3. Pour $X>\ln(2)$. On pose
$$I(X)=\int_{\ln(2)}^{X}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$$
$$I(X)=\int_{\ln(2)}^{X}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\left[2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)\right]_{\ln(2)}^{X}=2\arctan\left(\sqrt{e^X-1}\right)-2\arctan\left(\sqrt{e^{\ln(2)}-1}\right)=$$
$$=2\arctan\left(\sqrt{e^X-1}\right)-2\arctan(1)=2\arctan\left(\sqrt{e^X-1}\right)-\frac{\pi}{2}$$
$$I=\lim_{X\to+\infty}I(X)=2\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$
Car
$$\lim_{X\to+\infty}\sqrt{e^X-1}=+\infty$$

Exercice 4.

Déterminer un polynôme $P(t)$ de degré 2 tel que
$$0\le(1+t)^{\frac{1}{5}}-P(t)\le\frac{6}{125}\qquad\forall t\in[0,1]$$
En prouvant que le polynôme proposé satisfait cette inégalité.

Correction exercice 4.

La fonction $f(t)=(1+x)^{\frac{1}{5}}$ est $C^{+\infty}$ sur $[0,1]$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 3 entre 0 et t.
$$f(0)=1$$
$$f'(x)=\frac{1}{5}(1+x)^{-\frac{4}{5}}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{5}$$
$$f''(x)=-\frac{4}{25}(1+x)^{-\frac{9}{5}}\Rightarrow f''(0)=-\frac{4}{25}$$
$$f'''(x)=\frac{36}{125}(1+x)^{-\frac{14}{5}}$$

Il existe $c \in]0, t[$ tel que

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + \frac{t^3}{6} f'''(c)$$

$$(1+t)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{t}{5} - \frac{4}{25} \times \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \times \frac{36}{125} (1+c)^{-\frac{14}{5}}$$

$$(1+t)^{\frac{1}{5}} - 1 - \frac{t}{5} + \frac{2t^2}{25} = \frac{6t^3}{125} (1+c)^{-\frac{14}{5}}$$

$$0 < c < t \Rightarrow 1 < 1 + c < 1 + t \Rightarrow 1 < (1+c)^{\frac{14}{5}} < (1+t)^{\frac{14}{5}} \Rightarrow (1+t)^{-\frac{14}{5}} < (1+c)^{-\frac{14}{5}} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{6t^3}{125}(1+t)^{-\frac{14}{5}} < \frac{6t^3}{125}(1+c)^{-\frac{14}{5}} < \frac{6t^3}{125} \Rightarrow 0 < \frac{6t^3}{125}(1+c)^{-\frac{14}{5}} < \frac{6}{125} \Rightarrow 0$$

$$< (1+t)^{\frac{1}{5}} - 1 - \frac{t}{5} + \frac{2t^2}{25} < \frac{6}{125} \Rightarrow 0 < (1+t)^{\frac{1}{5}} - \left(1 + \frac{t}{5} - \frac{2t^2}{25}\right) < \frac{6}{125}$$

Donc $P(t) = 1 + \frac{t}{5} - \frac{2t^2}{25}$

Exercice 5.

(a) Calculer le développement limité d'ordre deux en 0 de la fonction

$$x \to \frac{2(2+3x)}{(2+2x)(2+x)}$$

(b) En déduire que quand $t \to +\infty$ on a

$$\frac{(2t+3)t}{(t+1)(2t+1)} = 1 - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

(c) Utiliser (b) pour calculer la valeur de

$$\lim_{t \to +\text{-}\infty} \left(\frac{(2t+3)t}{(t+1)(2t+1)}\right)^{4t^2}$$

Indication : un passage au logarithme serait judicieux.

(d) Montrer que

$$\lim_{t \to +\text{-}\infty} \left(1 + \frac{1}{2t+2}\right)^{8t+4} = e^4$$

On considère maintenant la suite

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{4n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On s'intéresse ci-dessous au calcul de la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

(e) Montrez que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{(2n+3)n}{(n+1)(2n+1)}\right)^{4t^2} \left(1 + \frac{1}{2n+2}\right)^{8n+4}$$

(f) A l'aide des questions précédentes, déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Correction exercice 5.

(a)

$$\frac{2+3x}{(1+2x)(1+x)} = \frac{2+3x}{2+3x+x^2}$$

Première méthode

La division suivante les puissances croissantes

$$
\begin{array}{r|l}
2+3x & 2+3x+x^2 \\ \cline{2-2}
2+3x+x^2 & 1-\frac{1}{2}x^2 \\ \hline
-x^2 & \\
-x^2+o(x^2) & \\ \hline
o(x^2) &
\end{array}
$$

Donc

$$\frac{2+3x}{(1+x)(2+x)} = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

Seconde méthode

$$\frac{2+3x}{(1+x)(2+x)} = \frac{2+3x}{2+3x+x^2} = \frac{1}{2}(2+3x)\times\frac{1}{1+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2} = \left(1+\frac{3}{2}x\right)\times\frac{1}{1+X}$$

$$= \left(1+\frac{3}{2}x\right)\times\left(1-X+X^2+o(X^2)\right)$$

Avec

$$X = \frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2$$

$$X^2 = \frac{9}{4}x^2+o(x^2)$$

$$o(X^2\ ) = o(x^2)$$

$$\frac{2+3x}{(1+x)(2+x)} = \left(1+\frac{3}{2}x\right)\times\left(1-\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2\right)+\frac{9}{4}x^2+o(x^2)+o(x^2)\right)$$

$$= \left(1+\frac{3}{2}x\right)\times\left(1-\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}x^2+o(x^2)+o(x^2)\right)$$

$$= 1-\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}x^2+o(x^2) = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

(b) On pose $t=\frac{1}{x}$ donc $x=\frac{1}{t}\to 0$ lorsque $t\to+\infty$

$$\frac{(2t+3)t}{(t+1)(2t+1)} = \frac{\left(\frac{2}{x}+3\right)\frac{2}{x}}{\left(\frac{2}{x}+2\right)\left(\frac{2}{x}\ +1\right)} = \frac{(2+3x)\times 2}{(2+2x)(2+x)} = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2) = 1-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

(c)

$$\left(\frac{(2t+3)t}{(t+1)(2t+1)}\right)^{4t^2} = e^{4t^2\ln\left(\frac{(2t+3)t}{(t+1)(2t+1)}\right)} = e^{4t^2\ln\left(1-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)} = e^{4t^2\left(-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)}$$

$$= e^{-2+o(1)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{e^2}$$

(d)

$$\left(1+\frac{1}{2t+2}\right)^{8t+4} = e^{(8t+4)\ln\left(1+\frac{1}{2t+2}\right)}$$

$$(8t+4)\ln\left(1+\frac{1}{2t+2}\right) \underset{+\infty}{\sim} (8t+4)\times\frac{1}{2t+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{8}{2} = 4$$

Donc

$$\lim_{t\to+\text{-}\infty}\left(1+\frac{1}{2t+2}\right)^{8t+4} = e^4$$

(e)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{4(n+1)^2}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4n^2}}=\frac{\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{4n^2+8n+4}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4n^2}}=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{8n+4}\left(\frac{1+\frac{1}{2n+2}}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{4n^2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{8n+4}\left(\frac{\frac{2+3n}{2n+2}}{\frac{2n+1}{2n}}\right)^{4n^2}=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{8n+4}\left(\frac{2n}{2n+1}\times\frac{2+3n}{2n+2}\right)^{4n^2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{8n+4}\left(\frac{n}{2n+1}\times\frac{2+3n}{n+1}\right)^{4n^2}$$

(f)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^4\times e^{-2}=e^2$$

Car

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{8n+4}=\frac{1}{e^2}$$

Et

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\times\frac{2+3n}{n+1}\right)^{4n^2}=e^4$$