

**Contrôle terminal-Mercredi 1 juin 2016****Durée : 2h****Les documents, les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés**

Questionnaire. (7 points) On veillera à justifier toute réponse avec soin.

Q1. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez brièvement votre réponse.

(a) Soit  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application linéaire surjective. Alors  $\dim(\ker(f)) = 2$ .(b) Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Le système

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ -2x + y + z = b \\ -x + 3y + 2z = c \end{cases}$$

A une solution unique.

(c) L'ensemble  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, xyz = 1\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .(d) L'ensemble  $V = \{(2t, 4t, -t), t \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .(e) L'intersection de deux sous-espaces distincts de dimension 3 de  $\mathbb{R}^4$  est un sous-espace vectoriel de dimension 2.

Q2. Parmi les matrices suivantes lesquelles sont inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction Questionnaire

Q1.

(a) D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$$

 $f$  est surjective donc  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ , ce qui entraîne que  $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ , par conséquent

$$\dim(\ker(f)) = 2$$

(b)

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ -2x + y + z = b \\ -x + 3y + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 - (-6) - 5 = 0$$

 $A$  n'est pas inversible donc le système admet une infinité de solution(c)  $(0,0,0) \notin V$  donc  $V$  n'est pas un espace vectoriel(d)  $u = (x, y, z) \in V \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, u = (2t, 4t, -t) = t(2, 4, -1)$  donc  $V = \text{vect}((2, 4, -1))$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .(e) Soient  $E$  et  $F$  deux espace de dimension 3 de  $\mathbb{R}^4$ , d'après la formule de Grassmann

$$\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 6 - \dim(E \cap F)$$

$$E \subset E + F \Rightarrow 3 = \dim(E) \leq \dim(E + F)$$

Si  $\dim(E + F) = 3$  alors  $E = E + F$ De même  $F = E + F$ , donc  $E = F$  ce qui n'est pas possible, par conséquent  $\dim(E + F) = 4$ D'où l'on déduit que  $\dim(E \cap F) = 2$ 

Q2.

Les 5 colonnes de  $A$  sont proportionnelles donc  $rg(A) = 1$ , pour que  $A$  soit inversible, il est nécessaire et suffisant que  $rg(A) = 5$ ,  $A$  n'est pas inversible.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Donc  $B$  est inversible.

$C$  est la matrice d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^5$ ,

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la ligne 2 à la ligne 1 on trouve  $x_3 = 0$ , on remplace

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_4 = -x_2 \\ x_5 = -x_4 = x_2 \end{cases}$$

$$x = (-x_2, x_2, 0, -x_2, x_2) = x_2(-1, 1, 0, -1, 1)$$

$$\dim(\ker(u)) = 1$$

D'après le théorème du rang, son rang est  $4 < 5$ ,  $C$  n'est pas inversible

Exercice 1. 6 points

Soit  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. L'application  $u$  est-elle injective ? surjective ? Justifiez vos réponses
2. On considère les vecteurs  $b_1 = (1, -2, 1)$ ,  $b_2 = (0, 1, 0)$  et  $b_3 = (1, 0, -1)$   
Montrer que  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Calculer  $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u)$  la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
4. Donner la matrice de passage  $P$  de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$  et calculer  $P^{-1}$ .
5. Que représente la matrice  $PDP^{-1}$  ?
6. En déduire  $A^{2016}$  ?

Correction exercice 1.

1.

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ce qui que  $\ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ , par conséquent  $u$  est injective, puis comme  $u$  est un endomorphisme,  $u$  est surjective.

2.

$$\det(b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

3. Les coordonnées de  $u(b_1)$  dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $u(b_1) = 2b_1$

Les coordonnées de  $u(b_2)$  dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $u(b_2) = 4b_2$

Les coordonnées de  $u(b_3)$  dans la base canonique sont

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc  $u(b_3) = 4b_3$

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u(b_1) & u(b_2) & u(b_3) \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix}$$

4.

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_3 = y_1 \\ -2x_1 + x_2 = y_2 \\ x_1 - x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + x_3 = y_1 \\ x_2 + 2x_3 = 2y_1 + y_2 \\ -2x_3 = -y_1 + y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - x_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 2x_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - \left(\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3\right) \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 2\left(\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3\right) \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. D'après le théorème de changement de base  $A = PDP^{-1}$

6.

$$\begin{aligned} A^{2016} &= PD^{2016}P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{2016} & 0 & 0 \\ 0 & 4^{2016} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{2016} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^{2016} & 0 & 4^{2016} \\ -2 \times 2^{2016} & 4^{2016} & 0 \\ 2^{2016} & 0 & -4^{2016} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^{2016} + 4^{2016} & 0 & 2^{2016} - 4^{2016} \\ -2 \times 2^{2016} + 2 \times 4^{2016} & 4^{2016} & -2 \times 2^{2016} + 2 \times 4^{2016} \\ 2^{2016} - 4^{2016} & 0 & 2^{2016} + 4^{2016} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2. (5 points) On considère le polynôme  $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$

1. Montrer que  $-1$  est racine double du polynôme  $P(X)$
2. Factoriser  $P(X)$  en facteurs irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Ecrire la décomposition en éléments simple dans  $\mathbb{R}[X]$  de la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^2 + 4X - 1}{X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1}$$

Correction exercice 2.

1.  $P(-1) = 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0$  donc  $-1$  est au moins racine simple

$$P'(X) = 4X^3 + 6X^2 + 4X + 2 \Rightarrow P'(-1) = -4 + 6 - 4 + 2 = 0$$

Donc  $-1$  est au moins racine double.

2.  $P(X)$  est divisible par  $(X + 1)^2 = X^2 + 2X + 1$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1 & X^2 + 2X + 1 \\ \hline X^4 + 2X^3 + X^2 & X^2 + 1 \\ \hline X^2 + 2X + 1 & \\ \hline X^2 + 2X + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc  $P(X) = (X + 1)^2(X^2 + 1)$

- 3.

$$F(X) = \frac{X^2 + 4X - 1}{X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1} = \frac{X^2 + 4X - 1}{(X + 1)^2(X^2 + 1)}$$

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division

Il existe quatre réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que :

$$F(X) = \frac{X^2 + 4X - 1}{(X + 1)^2(X^2 + 1)} = \frac{a}{X + 1} + \frac{b}{(X + 1)^2} + \frac{cX + d}{X^2 + 1}$$

On multiplie par  $(X + 1)^2$ , puis  $X = -1$

$$b = \left[ \frac{X^2 + 4X - 1}{(X^2 + 1)} \right]_{X=-1} = -2$$

On multiplie par  $X^2 + 1$ , puis  $X = i$

$$ci + d = \left[ \frac{X^2 + 4X - 1}{(X + 1)^2} \right]_{X=i} = \frac{-2 + 4i}{(i + 1)^2} = \frac{-2 + 4i}{2i} = -\frac{1}{i} + 2 = i + 2$$

Donc  $c = 1$  et  $d = 2$

Ensuite on a deux solutions, soit multiplie par  $X$ , puis  $X \rightarrow +\infty$

$$0 = a + c \Rightarrow a = -c = -1$$

Soit  $X = 0$

$$-1 = a + b + d \Rightarrow a = -1 - b - d = -1 + 2 - 2 = -1$$

Finalement

$$F(X) = -\frac{1}{X+1} - \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{X+2}{X^2+1}$$

Exercice 3. ((7 points) *Interpolation de Lagrange*)

On désigne par  $\mathbb{R}_2[X]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  constitués des polynômes de degré au plus 2. Soient  $a, b, c$  trois nombres réels deux à deux distincts et

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\mapsto (P(a), P(b), P(c)) \end{aligned}$$

L'application d'évaluation en  $a, b$  et  $c$

1. Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire.
2. Dire pourquoi le seul polynôme de degré au plus 2 tel que  $\varphi(P) = (0,0,0)$  est le polynôme nul  $P = 0$ . En déduire que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

*Indication : On pourra se baser sur des résultats du cours, en veillant à citer avec soin tout résultat utilisé*

3. Expliciter les polynômes  $L_a, L_b, L_c$  de degré au plus 2 tels que :

$$\varphi(L_a) = (1,0,0), \quad \varphi(L_b) = (0,1,0), \quad \varphi(L_c) = (0,0,1)$$

(Ces polynômes sont appelés les polynômes d'interpolation de Lagrange)

Dans les deux questions qui suivent, on pourra se servir de l'application  $\varphi$ .

4.
  - (i) Montrer que la famille  $(L_a, L_b, L_c)$  est libre. En déduire que c'est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
  - (ii) Déterminer les coordonnées du polynôme  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  dans la base  $(L_a, L_b, L_c)$ .
5. Soit  $A \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme de degré  $d \geq 3$ . Exprimer le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $(X-a)(X-b)(X-c)$  en termes des polynômes d'interpolation  $(L_a, L_b, L_c)$

Correction exercice 3.

1. Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_2[X]$  et soient  $\lambda_1, \lambda_2$  deux réels.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= ((\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(a), (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(b), (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(c)) \\ &= (\lambda_1 P_1(a) + \lambda_2 P_2(a), \lambda_1 P_1(b) + \lambda_2 P_2(b), \lambda_1 P_1(c) + \lambda_2 P_2(c)) \\ &= \lambda_1 (P_1(a), P_1(b), P_1(c)) + \lambda_2 (P_2(a), P_2(b), P_2(c)) = \lambda_1 \varphi(P_1) + \lambda_2 \varphi(P_2) \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $\varphi$  est linéaire.

2. Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$

$$\varphi(P) = (0,0,0) \Leftrightarrow (P(a), P(b), P(c)) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} P(a) = 0 \\ P(b) = 0 \\ P(c) = 0 \end{cases}$$

Or un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à deux à au plus deux racines réelles, donc  $P = 0$

- 3.

$$\varphi(L_a) = (1,0,0) \Leftrightarrow (L_a(a), L_a(b), L_a(c)) = (1,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} L_a(a) = 1 \\ L_a(b) = 0 \\ L_a(c) = 0 \end{cases}$$

D'où on déduit que  $b$  et  $c$  sont des racines de  $L_a$ , il existe donc une constante  $K \in \mathbb{R}$  tel que

$$L_a(X) = K(X-b)(X-c)$$

Puis la première équation donne

$$L_a(a) = 1 \Leftrightarrow K(a-b)(a-c) = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$$

Par conséquent

$$L_a(X) = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}$$

$$\varphi(L_b) = (0,1,0) \Leftrightarrow (L_b(a), L_b(b), L_b(c)) = (0,1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} L_b(a) = 0 \\ L_b(b) = 1 \\ L_b(c) = 0 \end{cases}$$

D'où on déduit que  $a$  et  $c$  sont des racines de  $L_b$ , il existe donc une constante  $K \in \mathbb{R}$  tel que

$$L_a(X) = K(X-a)(X-c)$$

Puis la seconde équation donne

$$L_b(b) = 1 \Leftrightarrow K(b-a)(b-c) = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{(b-a)(b-c)}$$

Par conséquent

$$L_a(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)}$$

$$\varphi(L_c) = (0,0,1) \Leftrightarrow (L_c(a), L_c(b), L_c(c)) = (0,0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} L_c(a) = 0 \\ L_c(b) = 0 \\ L_c(c) = 1 \end{cases}$$

D'où on déduit que  $a$  et  $b$  sont des racines de  $L_c$ , il existe donc une constante  $K \in \mathbb{R}$  tel que

$$L_c(X) = K(X-a)(X-b)$$

Puis la troisième équation donne

$$L_c(c) = 1 \Leftrightarrow K(c-a)(c-b) = 1 \Leftrightarrow K = \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

Par conséquent

$$L_c(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$$

4.

(i) Soient  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , trois réels

$$\begin{aligned} \alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c = 0 &\Rightarrow \varphi(\alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c) = \varphi(0) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow \alpha \varphi(L_a) + \beta \varphi(L_b) + \gamma \varphi(L_c) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) \\ &= (0,0,0) \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

La famille  $(L_a, L_b, L_c)$  est libre, c'est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension trois, c'est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

(ii) Soient  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , trois réels tels que  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  :

$$\begin{aligned} P &= \alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c \\ \varphi(P) &= (P(a), P(b), P(c)) \Leftrightarrow (P(a), P(b), P(c)) \\ &= ((\alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c)(a), (\alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c)(b), (\alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c)(c)) \\ &\Leftrightarrow (P(a), P(b), P(c)) \\ &= (\alpha L_a(a) + \beta L_b(a) + \gamma L_c(a), \alpha L_a(b) + \beta L_b(b) + \gamma L_c(b), \alpha L_a(c) + \beta L_b(c) \\ &\quad + \gamma L_c(c)) \\ &= (\alpha L_a(a) + \beta L_b(a) + \gamma L_c(a), \alpha L_a(b) + \beta L_b(b) + \gamma L_c(b), \alpha L_a(c) + \beta L_b(c) \\ &\quad + \gamma L_c(c)) = (\alpha, \beta, \gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = P(a) \\ \beta = P(b) \\ \gamma = P(c) \end{cases} \end{aligned}$$

D'où  $P = P(a)L_a + P(b)L_b + P(c)L_c$

5. Dans la division de  $A \in \mathbb{R}[X]$  par  $(X-a)(X-b)(X-c)$  il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  et un polynôme  $R \in \mathbb{R}_2[X]$ , donc il existe  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , trois réels tels que  $R = \alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c$  tels que :

$$A = (X-a)(X-b)(X-c)Q + \alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c$$

Ce qui entraîne que :

$$A(a) = \alpha L_a(a) + \beta L_b(a) + \gamma L_c(a) = \alpha$$

$$A(b) = \alpha L_a(b) + \beta L_b(b) + \gamma L_c(b) = \beta$$

$$A(c) = \alpha L_a(c) + \beta L_b(c) + \gamma L_c(c) = \gamma$$

$$\text{Donc } R = A(a)L_a + A(b)L_b + A(c)L_c$$