Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2016-2017

Fondamentaux des mathématiques I

Feuille d'exercices n° 10

RÉELS ET SUITES

Exercice 1. ☺

Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$.

1. On note $-A = \{-a \mid a \in A\}$.
   (a) Montrer que $\inf A$ existe si et seulement si $\sup -A$ existe et que dans ce cas $\inf A = -\sup -A$.
   (b) Montrer que $\sup A$ existe si et seulement si $\inf -A$ existe et que dans ce cas $\sup A = -\inf -A$.
2. Soit $B \subset A$ non vide.
   (a) On suppose A majoré. Montrer que B possède une borne supérieure et que $\sup B \leq \sup A$.
   (b) On suppose A minoré. Montrer que B possède une borne inférieure et que $\inf B \geq \inf A$.

Exercice 2. ☺

Déterminer pour les ensembles qui suivent s'ils possèdent des bornes supérieure et inférieure. Le cas échéant, donner ces bornes et décider si ce sont également des extrema.

1. $[0,1[$
2. $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^\star \right\}$
3. $\left\{ \frac{m}{mn+1} \mid (m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^\star \right\}$
4. $[0,\sqrt{2}] \cap \mathbf{Q}$

Exercice 3. ☺

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{Z}$.
   Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.
2. Soit $D \subset \mathbf{Z}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que D possède un plus grand élément.

Exercice 4. ☺

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell > 0$.
Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $N \geq N_0 \Longrightarrow u_n \geq \frac{\ell}{2}$.

Exercice 5. ☺

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe bornée et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbf{C}$.

1. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
2. Qu'en est-il si $\ell \neq 0$?

Exercice 6. ☺ *Suites arithmético-géométriques.*
Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et $u^{(0)} \in \mathbf{R}$. On définit par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que : $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} = (u_n - \alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. Étudier la convergence de (u_n). Indication : on distinguera les cas $|a| < 1$, $|a| > 1$ et $a = -1$.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 7. ☺
Soit $\mu \in \mathbf{R}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels distincts a et b tels que $(u_n^a)_{n\in\mathbf{N}} = (a^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_n^b)_{n\in\mathbf{N}} = (b^n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_{n+2} = -2\mu\, u_{n+1} - \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right) u_n\ .$$
2. Montrer que, pour tout $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$, il existe $(\lambda_a, \lambda_b) \in \mathbf{R}^2$ tel que
$$u_0 = \lambda_a\, u_0^a + \lambda_b\, u_0^b \qquad \text{et} \qquad u_1 = \lambda_a\, u_1^a + \lambda_b\, u_1^b\ .$$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -2\mu\, u_{n+1} - \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right) u_n$.
   (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n à l'aide de (u_0, u_1, a, b, n).
   (b) Étudier la convergence de (u_n).

Exercice 8. ☺
On rappelle que
– pour tout $a > 1$ et tout $\alpha \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$;
– pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$;
– pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.
Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $(u_n) = (n(-1)^n)$
2. $(u_n) = \left(\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}\right)$
3. $(u_n) = (\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbf{N}^\star}$
4. $(u_n) = \left(2 + \frac{\sin(n) - 4}{n^2}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$
5. $(u_n) = (n^{\frac{1}{\ln n}})_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}}$
6. $(u_n) = \left(\frac{(-5)^n + n}{3^n - 1}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$
7. $(u_n) = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$

Exercice 9. ☺

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite de
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 10. ☺ *Somme harmonique.*

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire la nature de la suite (u_n).

Exercice 11. 😐

On considère $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{(n+2)\,u_n}{2(n+1)}\ .$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que : $\forall n \geq 2,\ u_n \geq 2$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 12. 😐 *Irrationalité de e.*

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n.n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Posons $e = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Montrer que e est irrationnel. *Le nombre e n'est autre que* $\exp(1)$.

Exercice 13. ☺

Le but de cet exercice est d'étudier la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n(1-u_n), & \forall\ n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbf{R}$, la suite (u_n) est bien définie.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 2x(1-x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Dresser le tableau des variations de f et dessiner son graphe.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
4. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f. Déterminer les points fixes de f. Que peut-on dire de la suite (u_n) si u_0 est l'un des points fixes de f ?
5. Montrer que les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1/2[$ sont stables par f et que f est croissante sur ces intervalles. *On dit qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.*
6. On suppose que $u_0 \in]0, 1/2[$. Montrer que la suite (u_n) est alors croissante *(On pourra s'aider de la question 3.)* En déduire la nature de la suite (u_n). Même question si $u_0 \in]-\infty, 0[$.
7. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]1/2, +\infty[$.

Exercice 14. ☹

Le but de cet exercice est d'étudier la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(u_n^2 - 1), & \forall\ n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $u_0 \in \mathbf{R}$, la suite (u_n) est bien définie.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x(x^2 - 1)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Dresser le tableau des variations de f et dessiner son graphe.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
4. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f. Déterminer les points fixes de f. Que peut-on dire de la suite (u_n) si u_0 est l'un des points fixes de f ?
5. Montrer que l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ est stable par f et que f est décroissante sur cet intervalle.
6. On suppose que $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et déterminer leur monotonie en fonction du signe de u_0 *(On pourra étudier le signe de $(f \circ f)(x) - x$ sur l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$).* Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.
7. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.
8. On suppose que $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Quelle est la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}[$?
9. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\infty, -\sqrt{2}[$ et lorsque $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$.

Exercice 15. ☺☹

En suivant la démarche décrite dans les exercices 13 et 14, étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est donnée par :

1. $f(x) = x^2$,	2. $f(x) = x^2 + 1$,	3. $f(x) = \sqrt{1+x}$,
4. $f(x) = 1 + \ln(x)$,	5. $f(x) = e^x - 1$,	6. $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

⚠ *Pour certaines valeurs de u_0, la suite (u_n) peut ne pas être définie à partir d'un certain rang.*

Exercice 16. ☺

Montrer que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$$

Exercice 17. ☺ *Calcul approché de $\sqrt{a}$.*

Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1. Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
   Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de v_0 et n.
3. Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0.v_0^{2^n}$.
   Ainsi, u_n réalise une approximation de $\sqrt{a}$ à la précision $2u_0.v_0^{2^n} \underset{n\infty}{\to} 0$.

Exercice 18. ☺

Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbf{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbf{R}_+$. Étudier la limite de (x_n).

Exercice 19. ☺

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 20. 😐

Soit n un entier naturel non nul et E_n l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbf{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation E_n admet une unique solution x_n, et que $x_n \geq 1$.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

Exercice 21. ☹ *Lemme de Cesàro*[1].

1. Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On définit la suite (v_n) dont le terme général est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (u_n) :

   $$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}.$$

   Montrer que si (u_n) converge vers l alors (v_n) converge également vers l.
2. Soit (u_n) une suite réelle strictement positive. On suppose qu'il existe un réel α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \to l$. Montrer que $u_n \sim \sqrt[\alpha]{nl}$.
3. Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$. Donner un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
4. Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Donner un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 22. ☹

Soit (u_n) une suite réelle minorée. On suppose que (u_n) est sous-additive, c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété :

$$u_{n+m} \leq u_n + u_m, \qquad \forall\, (n, m) \in \mathbf{N}^2.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers $\inf\left\{\frac{u_k}{k}, k \in \mathbf{N}^*\right\}$.

Exercice 23. ☹

Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que (u_n) converge vers $l \in \mathbf{R}$ si, et seulement si de toute sous-suite de (u_n), on peut extraire une sous-sous-suite qui converge vers l.

1. Ernesto Cesàro. Naples 1859 - Torre Annunziata 1906. Mathématicien italien.