Chap 5

# Réduction algébrique

## I Polynômes d'endomorphisme.

### 1) Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u^k = u \circ \dots \circ u$ ($k$ fois)
et $u^0 = id$.

Si $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, alors on pose

$$P(u) = \sum_{k=0}^{N} a_k u^k.$$

C'est encore un endomorphisme de $E$.

Une $\mathbb{K}$-algèbre : $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ sur un corps $\mathbb{K}$ tq $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un e.v., et en plus un produit interne $\times$, avec les règles usuelles : associatif, distributif sur $+$ et c'est tout... pas forcément d'unité, pas forcément commutatif,...

La plupart du temps l'algèbre a une unité : $1_{\mathcal{A}} B = B 1_{\mathcal{A}} = B$, $\forall B \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{L}(E)$ est une algèbre, $M_n(\mathbb{K})$ aussi, $\mathbb{K}[X]$ aussi.

**Proposition**

L'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ est un morphisme d'algèbre
$\qquad P \mapsto P(u)$

Dem

$\varphi_u(1) = id_E$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$, $Q(X) = \sum_{k=0}^{M} b_k X^k$.

On peut supposer $M = N$ quitte à rajouter des coeffs nuls.

$\varphi_u(\lambda P + \mu Q) = \varphi_u\left(\sum_{k=0}^{N} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k\right) = \sum_{k=0}^{N} (\lambda a_k + \mu b_k) u^k$

$= \lambda \sum a_k u^k + \mu \sum b_k u^k = \lambda \varphi_u(P) + \mu \varphi_u(Q)$.

$\varphi_u(PQ) = PQ(u) = \left[\sum a_k (X^k Q(X))\right](u)$

$= \sum_k a_k (X^k Q)(u)$ car $\varphi_u$ linéaire.

Mais $(X^k Q)(u) = \left[\sum_\ell b_\ell X^{k+\ell}\right](u) = \sum_\ell b_\ell u^{k+\ell} = u^k \circ Q(u)$

$\Rightarrow (PQ)(u) = \sum_k a_k u^k \circ Q(u) = P(u) \circ Q(u) = \varphi_u(P) \circ \varphi_u(Q)$. ∎

Rem : Toute identité polynomiale se transpose aux endomorphismes.
Par exemple, $X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1) \Rightarrow u^3 - 2u + id_E = (u - id_E) \circ (u^2 + u - id_E)$.

## 2) Polynôme d'endomorphisme

On dit que $v \in \mathcal{L}(E)$ est un polynôme en $u \in \mathcal{L}(E)$, s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $v = P(u)$.

On note $\mathbb{K}[u]$ l'ens. des pol. en $u$ :

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Thm

$\mathbb{K}[u]$ est une sous-alg. commutative de $\mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{A}$ est une sous-alg. de $\mathcal{L}(E)$ tq $u \in \mathcal{A}$, alors $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{A}$.

Ainsi $\mathbb{K}[u]$ est la plus petite sous-alg de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $u$, on dit que c'est l'alg. engendrée par $u$.

Dem

$\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{L}(E)$, $id_E \in \mathbb{K}[u]$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $v, w \in \mathbb{K}[u]$, alors $v = P(u)$, $w = Q(u) \Rightarrow \lambda v + \mu w = (\lambda P + \mu Q)(u) \in \mathbb{K}[u]$ et $v \circ w = (PQ)(u) \in \mathbb{K}[u]$. Donc $\mathbb{K}[u]$ est une sous-alg. de $\mathcal{L}(E)$.

Elle est commutative car $(PQ)(u) = (QP)(u)$.

Si $\mathcal{A} \ni u$, alors $u^n \in \mathcal{A}$ $\forall n$, puis

$$\mathbb{K}[u] = \text{vect}\{u^n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}. \qquad \blacksquare$$

Rem Si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $\text{Im}\, P(u)$ et $\ker P(u)$ sont stables par $u$ car $P(u)$ et $u$ commutent.

## 3) Polynôme annulateur.

On appelle polynôme annulateur de $u$, tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(u) = 0$

Exemple : soit $u$ un projecteur, alors $X^2 - X$ annule $u$.

Thm

L'ens. des pol. annul. de $u$ est un e.v. et un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

__Dem__ Soit $I = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\}$. Alors $I$ est le noyau de l'endom $\varphi_u$, donc c'est un e.v.

Comme $\varphi_u$ est un morphisme d'algèbre alors $I = \ker \varphi_u$ est un idéal : Si $P \in I$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $\varphi_u(QP) = \varphi_u(Q)\varphi_u(P) = 0$.

__Remarque__ : Si $P$ annule $u$ et $P \mid Q$ alors $Q$ annule $u$.

__Thm__

> Les valeurs propres de $u$ sont incluses dans les racines des poly. annulateurs de $u$.

__Dem__

Si $P(u) = 0$ et $\lambda$ v.p. de $u$, alors $P(\lambda)$ est v.p. de $P(u)$ et donc $P(\lambda) = 0$. ∎

__Rem__ : Les racines de P annulateur ne sont pas toutes forcément des v.p. de $u$.

__Exemple__ : $u$ projection $\Rightarrow X^2 - X$ annulateur, on retrouve $Sp(u) \subset \{0,1\}$.

$u$ nilpotent $\Rightarrow X^n$ annulateur $\Rightarrow Sp(u) \subset \{0\}$.

## II Polynôme d'une matrice.

### 1) Valeur

Soit $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $M\in M_n(\mathbb{C})$, alors

$$P(M)=\sum_{k=0}^{n} a_k M^k \quad (M^0=I_n).$$

- Si $M=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$, alors $M^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{pmatrix}$, même pour $k=0$.

$\Rightarrow P(M)=\begin{pmatrix}P(\lambda_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n)\end{pmatrix}$.

- Si $M=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ alors $M^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & *'\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{pmatrix}$ $\forall k\in\mathbb{N}$ et donc

$P(M)=\begin{pmatrix}P(\lambda_1) & & *''\\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n)\end{pmatrix}$.

- Si $M=\begin{pmatrix}A & *\\ 0 & B\end{pmatrix}$ alors $P(M)=\begin{pmatrix}P(A) & *\\ 0 & P(B)\end{pmatrix}$

- Notez que $\boxed{{}^tP(M)=P({}^tM)}$

**Thm**

L'application $\varphi_M : \mathbb{K}[X]\to M_n(\mathbb{K})$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-alg.
$P\mapsto P(M)$

## 2) Polynôme en une matrice (carrée)

On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est un polynôme en $M \in M_n(\mathbb{K})$ si $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tq $A = P(M)$. On note $\mathbb{K}[M]$ l'ens. des polynômes en $M$.

**Thm**

$\mathbb{K}(M)$ est une sous-alg. commutative de $M_n(\mathbb{K})$. Elle est incluse dans toute sous alg. contenant $M$.

## 3) Polynôme annulateur.

Idem : $P$ tq $P(M) = 0$.

**Rem** $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $X^2 - (a+d)X + ad - bc$ est annulateur de $M$. (ex).

**Rem**

$\boxed{P(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}P(A)Q}$ (exercice).

←

**Prop**

Si $A$ et $B$ sont semblables alors elles ont les mêmes polynômes annulateurs.

**Thm**

L'ens. des pol. annul. de $M$ est un s.e.v. et un idéal de $M_n(\mathbb{K})$.

Si $P$ annule $M$ et $P | Q$ alors $Q$ annule $M$.

4) V.p. et pol. annul.

Thm

$\boxed{\text{Les v.p. de } M \subset \text{racines du pol. annul. de } M.}$

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ tq $A^3 = I$.

Alors $X^3 - 1$ annule $A$. Mais dans $\mathbb{R}[X]$ $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$

$\Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{1\}$. Mais $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$ car de taille impaire.

$\Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$.

Dans $\mathbb{C}$, $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2) \Rightarrow Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, j, j^2\}$.

Les v.p. de $A$ sont 2 à 2 conjuguées et $1 \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \Rightarrow$

$Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{1\}$ ou bien $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{1, j, j^2\}$.

$\chi_A$ est forcément scindé dans $\mathbb{C} \Rightarrow \operatorname{tr}(A) = 3$ ou $0$ et $\det A = 1$.

# III Polynômes annulateurs en dim finie

## 1) Thm de Cayley-Hamilton

Thm

> Le polynôme caractéristique $\chi_u$ de $u \in \mathcal{L}(E)$ est toujours annulateur de $u$.
> La même propriété se transpose aux matrices.

<u>Dem</u> (hors programme... mais accessible quand même !)

Soit $n = \dim E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$, on va montrer que $[\chi_u(u)](x) = 0$ et donc que $\chi_u(u) = 0$. Pour $x = 0$ c'est évident.

Pour $x \neq 0$, on regarde $x, u(x), u^2(x), \dots$ On arrête la liste dès que

$\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$ est libre et $u^p(x)$ est lié à $\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$.

On a donc $u^p(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \dots + a_{p-1} u^{p-1}(x)$.

On complète la famille $\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$ en une base de $E$. La matrice de $f$ dans cette base devient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & a_0 & * \\ 1 & 0 & & & \vdots & * \\ & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{p-1} & \\ & 0 & & 1 & 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_p & * \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

Où $C_p$ est la matrice compagnon de $Q(X) = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \dots - a_0$.

Notez que $Q(u)(x) = u^p(x) - a_{p-1}u^{p-1}(x) - \dots - a_0 x = 0$.

On a donc $\chi_u = \chi_{C_p} \times \chi_M = Q \times \chi_M$.

Donc $\chi_u(u)(x) = \left(\chi_M(u) \circ Q(u)\right)(x) = \chi_M(u)\left[Q(u)(x)\right] = \chi_M(u)[0] = 0$. $\blacksquare$

## 2) Polynôme minimal

**Thm**

> Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ il existe un unique polynôme $\Pi_u$ vérifiant :
> 1) $\Pi_u$ est annulateur de $u$
> 2) $\Pi_u$ est unitaire
> 3) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(u)=0 \Rightarrow \Pi_u \mid P$.

Cela se transpose aux matrices de la même façon.
Cet unique polynôme est appelé <u>polynôme minimal</u> de $u$.

**Dem**

Soit $I = \{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(u)=0\}$. On va d'abord montrer que $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $I = Q\,\mathbb{K}[X]$, i.e. $I = \{QP,\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

En effet $I \neq \{0\}$ car il contient $\chi_u$. Soit $Q \in I$, de degré minimal.

Comme $I$ est un idéal, on a $Q\,\mathbb{K}[X] \subset I$.

Inversement, soit $A \in I$, par division euclidienne $A = PQ + R$ avec $\deg R < \deg Q$. Mais $R = A - PQ$ donc $R \in I$. Avec la contrainte $\deg R < \deg Q$ c'est impossible, sauf $R = 0$.

Donc $A = PQ \Rightarrow A \in Q\,\mathbb{K}[X]$. On a montré $I = Q\,\mathbb{K}[X]$.

En divisant $Q$ par son coef de plus haut degré on le rend unitaire (et toujours annulateur de $u$).

Et on a bien montré que $\forall R \in I$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $R = PQ$ $\Rightarrow Q \mid R$.

Montrons l'unicité : si $\Pi_u$ et $\tilde{\Pi}_u$ sont 2 tels polynômes alors

$\Pi_u \mid \tilde{\Pi}_u$ et $\tilde{\Pi}_u \mid \Pi_u \Rightarrow \Pi_u = \lambda \tilde{\Pi}_u$. Mais étant tous deux unitaires, ils sont égaux. $\boxtimes$

Notez que $\Pi_u$ est forcément non constant.

- Soit $u$ un projecteur autre que $0$ et $I$. Quel est son pol. min ?

On a $X^2 - X$ qui annule $u$, donc $\Pi_u \mid X^2 - X = X(X-1)$

$\Rightarrow \Pi_u = X$ ou $X-1$ ou $X(X-1)$.

Le cas $\Pi_u = X$ signifie $u=0$, le cas $\Pi_u = X-1$ signifie $u = I$, donc il ne reste que $\Pi_u = X(X-1)$.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\chi_A(x) = (x-2)(x-3)$.

Comme $A \neq 3I$ et de $2I \Rightarrow \Pi_A(x) = (X-2)(X-3)$.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A = (X-1)^2(X-2)$. Donc $\Pi_A = (X-1)(X-2)$ ou $(X-1)^2(X-2)$.

Mais on voit facilement que $(u-I)(u-2I) = 0 \Rightarrow \Pi_u = (X-1)(X-2)$.

## 3) Pol. min. et v.p.

**Thm**

$$\boxed{\text{Les v.p. de } u \text{ sont exactement les racines de } \Pi_u.}$$

**Dem**

Si $\lambda$ est v.p. de $u$, on sait que $\lambda$ est racine de $\Pi_u$ car $\Pi_u$ est annulateur de $u$. Inversement, si $\lambda$ est racine de $\Pi_u$ alors $\lambda$ est racine de $\chi_u$, donc $\lambda$ est v.p. de $u$.

$\square$

On a donc toujours $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$ divise $\Pi_u$.

## 4) Calcul de $A^n$

Un méthode très efficace.

Considérons la division euclidienne de $X^n$ par $\Pi_A$ :

$$X^n = Q(X)\,\Pi_A(X) + R(X)$$

avec $\deg R < \deg \Pi_A$. On ne va pas expliciter $Q(X)$, mais $R(X)$.

Comme $\Pi_A(X) = (X-\lambda_1)^{n_1} \cdots (X-\lambda_e)^{n_e}$, $\deg \Pi_A = n_1 + \cdots + n_e = d$, on écrit les relations suivantes :

$\lambda_i^n = Q(\lambda_i)\,\Pi_A(\lambda_i) + R(\lambda_i) \Rightarrow \lambda_i^n = R(\lambda_i)$.

Ensuite : $n X^{n-1} = Q'\,\Pi_A + Q\,\Pi_A' + R'$

$\Rightarrow n\lambda_i^{n-1} = 0 + R'(\lambda_i)$ si $n_i \geq 2$

Donc pour chaque $\lambda_i$, on obtient $n_i$ relations entre $X^n$ et ses dérivées en $\lambda_i$, et $R$ et ses dérivées en $\lambda_i$.

Cela fait en tout $d$ relations, donc cela détermine $R$ qui est de $\deg < d$.

Enfin : $A^n = Q(A)\,\Pi_A(A) + R(A) = R(A)$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\Pi_A = (X-2)(X-3)$.

$X^n = Q\,\Pi_A + R$ avec $\deg R < 2 \Rightarrow R = aX + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^n = 2a+b \\ 3^n = 3a+b \end{cases} \Rightarrow a = 3^n - 2^n \text{ et } b = 3\times 2^n - 2.3^n$$

$$R(X) = (3^n - 2^n)X + (3.2^n - 2.3^n) I$$

Du coup, $A^n = (3^n - 2^n)A + (3.2^n - 2.3^n) I$

$$A = \begin{pmatrix} 3^n - 2^n + 3.2^n - 2.3^n & 3^n - 2^n \\ -2.3^n + 2^{n+1} & 4.3^n - 4.2^n + 3.2^n - 2.3^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 3^n - 2^n \\ 2^{n+1} - 2.3^n & -2^n + 2.3^n \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A = (X-1)^2(X-2)$

Mais $(A-I)(A-2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \pi_A = (X-1)^2(X-2)$.

$A^n = Q.\pi_A + R$ avec $R = aX^2 + bX + c$.

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a+b+c \\ 2^n &= 4a+2b+c \\ n1^{n-1} = n &= 2a+b. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{etc.} \begin{cases} a = 2^n - n - 1 \\ b = -2^{n+1} + 3n + 2 \\ c = 2^n - 2n \end{cases}$$

$$A^n = R(A) = aA^2 + bA + cI.$$

# IV Réduction et polynômes annulateurs.

## 1) Le lemme des noyaux.

**Thm**

| |
|---|
| Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $P$ et $Q$ sont premiers entre eux alors $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$ |

## Dem

Puisque $P \wedge Q = 1$, il existe $R, S \in \mathbb{K}[X]$ tq $RP + SQ = 1$.

Donc $id = R(u) \circ P(u) + S(u) \circ Q(u)$.

Soit $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$. On a

$x = R(u)\left(P(u)(x)\right) + S(u)\left(Q(u)(x)\right) = 0$.

Donc $\ker P(u)$ et $\ker Q(u)$ sont en somme directe.

Montrons que $\ker P(u) \oplus \ker Q(u) \subset \ker (PQ)(u)$.

En effet, $\ker (PQ)(u) = \ker (QP)(u) = \ker P(u) \circ Q(u) = \ker Q(u) \circ P(u)$.

donc $\ker P(u) \subset \ker (PQ)(u)$ et $\ker Q(u) \subset \ker (PQ)(u)$.

$\Rightarrow \ker P(u) \oplus \ker Q(u) = \mathrm{vect}\left(\ker P(u), \ker Q(u)\right) \subset \ker (PQ)(u)$.

Inversement, si $x \in \ker (PQ)(u)$. On a $x = R(u) \circ P(u)(x) + S(u) \circ Q(u)(x)$
$= a + b$.

Mais $P(u)(b) = P(u) \circ S(u) \circ Q(u)(x) = S(u) \circ (PQ)(u)(x) = 0$

et $Q(u)(a) = 0$ de la même manière.

Donc $a \in \ker Q(u)$ et $b \in \ker P(u) \Rightarrow x \in \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$. $\square$

## Corollaire

Si $P_1, \dots, P_m$ sont premiers entre eux deux à deux, alors

$$\ker\left(\prod_{i=1}^{m} P_i\right)(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker P_i(u).$$

*Exemple* : projecteur $u^2 = u$. Alors $P(X) = X(X-1)$ annule $u$.

$\ker P(u) = \ker u \oplus \ker (u - id)$

i.e. $E = \ker u \oplus \ker (u - id)$.

## 2) Diagonalisabilité

**Thm**

Il y a équivalence entre
i) $u$ est diagble
ii) $u$ admet un pol. annul. scindé à racines simples.
iii) $\Pi_u$ est scindé à racines simples.

Dans ce cas $\Pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)$.

**Dem**

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les v.p. de $u$.

i) $\Rightarrow$ ii) Dans ce cas $E = \bigoplus_{k=1}^{m} E_{\lambda_k}(u)$

$$\Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m I_{\alpha_m} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_k = \dim E_{\lambda_k}(u).$$

Soit $P = \prod_{k=1}^{m} (X-\lambda_k)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, P(u) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) I_{\alpha_1} & & 0 \\ 0 & \ddots & P(\lambda_m) I_{\alpha_m} \end{pmatrix} = 0$.

Ainsi $u$ annule un pol. scindé à racines simples.

ii) $\Rightarrow$ iii) Si $P$ scindé à rac. simples annule $u$ alors $\Pi_u | P$ et $\Pi_u$ est forcement scindé à racines simples.

iii) $\Rightarrow$ i) Si $\Pi_u$ est scindé à racines simples, on a forcement.

$\Pi_u = \prod_{k=1}^{m} (X-\lambda_k)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les v.p. de $u$.

Par le lemme des noyaux

$$\ker \Pi_u(u) = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker(u - \lambda_k I)$$

i.e. $E = \bigoplus_{k=1}^{m} E_{\lambda_k}(u)$.

i.e. $u$ est diagble. ∎

### 3) Réduction d'un endom. induit

**Lemme**

Si $F$ est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $F$ est stable par tout polynôme de $u$. De plus on a $P(u)_F = P(u_F)$.

**Dem**

Si $F$ est stable par $u$, il l'est par $u^2, u^3, \dots, u^n$ etc...

Clairement $(u^2)_F = (u_F)^2$ etc... ∎

**Prop**

Si $F$ est stable par $u$ alors

$$\Pi_{u_F} \mid \Pi_u.$$

**Dem**

$\Pi_u$ annule $u$, donc $\Pi_u$ annule $u_F \Rightarrow \Pi_{u_F} \mid \Pi_u$ ∎

**Thm**

Si $u$ est diagble et si $F$ est stable par $u$, alors $u_F$ est diagble.

Dem

$\Pi_u$ est scindé à racines simples, donc $\Pi_{u_F}$ aussi. $\square$

Corollaire

Si $u$ est diagble, les seuls sous-espaces stables par $u$ sont ceux qui admettent une base de $\vec{V}.p.$

Théorème

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagble. Si $u$ et $v$ commutent, alors ils admettent une base commune de $\vec{V}.p.$

Dem

$u$ est diagble $\Rightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$.

Comme $u, v$ commutent, alors $E_\lambda(u)$ est stable par $v$. Comme $v$ est diagble $\Rightarrow v_{E_\lambda(u)}$ aussi. Donc il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_\lambda(u)$, formée de $\vec{V}.p.$ de $v$. Mais du coup, ce sont aussi des $\vec{V}.p.$ de $u$.

Ainsi de suite pour chaque $E_\lambda(u)$, on forme une base de $E$ constituée de $\vec{V}.p.$ communs à $u$ et $v$. $\square$

Matriciellement, si $A, B$ diagbl et $A, B$ commutent, alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

## 4) Trigonalisabilité

**Thm**

Il y a éq. entre
i) u est trigble
ii) u annule un pol. scindé dans $\mathbb{K}[X]$
iii) $\Pi_u$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

Dans ce cas, E est la somme directe de sous-espaces stables par u, dans lesquels u induit, sur chacun, la somme d'une homothétie et d'un endom. nilpotent.

**Dem**

i) ⇒ ii) u annule $\chi_u$ qui est scindé !
ii) ⇒ iii) $\Pi_u$ divise un pol. scindé !
iii) ⇒ i) : $\Pi_u = \prod_{k=1}^{m} (X-\lambda_k)^{\alpha_k}$. Les $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les v.p. distinctes de u. Par le lemme des noyaux

$$E = \bigoplus_{k=1}^{m} \operatorname{Ker}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$$

Regardons $F = \operatorname{Ker}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$. C'est un espace stable par u. Posons $n_F = u_F - \lambda_k id_F$, alors $n_F^{\alpha_k} = 0 \Rightarrow n_F$ est nilpotent. Donc $u_F = \lambda_k id + n_F$.

Comme $n_F$ est nilpotent, il est semblable à une triang. sup.

En accolant ces bases, u devient triang. sup et de la forme annoncée. ☐

Les espaces $\operatorname{Ker}(u-\lambda_k id)^{\alpha_k}$ s'appellent <u>espaces caractéristiques</u> de u.

Corollaire

Toute matrice A trigble est semblable à une matrice triang. sup. par blocs où chq bloc est de la forme $\lambda I + N$, avec N nilpotent.

Corollaire

Si u trigble et F stable par u, alors $u_F$ est trigble.

## 5) Décomposition de Dunford

Thm

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\Pi_u$ scindé sur $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe n et d uniques tq d diagonalisable, n est nilpotent et n, d commutent, tels que $u = d + n$.

Dem

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{m} (X-\lambda_k)^{\alpha_k}, \quad E = \bigoplus_{k=0}^{m} \ker(u-\lambda_k)^{\alpha_k}$$

Soit d, défini par : $d(x) = \lambda_k x$ si $x \in \ker(u-\lambda_k)^{\alpha_k}$, $1 \leq k \leq m$.
Il est clairement diagble. Ses sous-esp. propres sont les sous-esp. caract. de u.

Posons $n = u - d$.

Sur $\ker(u-\lambda_k)^{\alpha_k}$ on a $n(x) = u(x) - \lambda_k x \Rightarrow n^{\alpha_k}(x) = 0$
Si on prend $N = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, on a $n^N(x) = 0 \ \forall x \in E$.

Donc $n$ est nilpotent.

On a, $\forall x \in \ker(u-\lambda_k)^{\alpha_k}$ : $n \circ d(x) = n(\lambda_k x) = \lambda_k n(x) = d \circ n(x)$.

Donc $d$ et $n$ commutent.

<u>Unicité</u> : Si $u = d+n$ comme annoncé ! Alors comme $d$ commute avec $n$, il commute avec $u = d+n$. Donc $\underset{F=}{\ker}(u-\lambda_k)^{\alpha_k}$ est stable par $d$.

L'end. $d_F$ est diagble. Soit $\mu$ une v.p. de $d_F$ et $G = E_\mu(v_F) \subset F$

Alors $G$ est stable par $u$ et donc par $n = u-d$. On a donc
$u_G = \lambda I_G + n_G$.

Mais $n_G$ est nilpotent, donc trigble. Si on se place dans une base où $n_G$ est triang. sup. $\Rightarrow$ $\mu$ est v.p. de $u_G$, donc v.p. de $u_F$.

Mais la seule v.p possible de $u_F$ sur $F$ c'est $\lambda_k$ (exercice). Donc $v = \lambda_k I$ sur $F$.

Ainsi $d$ est entièrement déterminé. Du coup $n$ aussi ! $\boxed{\equiv}$

## 6) Projecteurs spectraux

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\Pi_u$ scindé : $\Pi_u = \prod_{k=1}^{m} (X-\lambda_k)^{\alpha_k}$.

La décomp. en éléments simples de $\dfrac{1}{\Pi_u(X)}$ donne

$$\frac{1}{\Pi_u(X)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{P_i(X)}{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}, \text{ avec } d^\circ P_i < \alpha_i.$$

On a encore $1 = \sum_{k=1}^{n} P_i(X) \frac{\Pi_u(X)}{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}$. Notons $Q_i(X)$ le polynôme $\frac{\Pi_u(X)}{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}$

Posons $\Pi_i = P_i(u) Q_i(u)$. On a donc $id = \sum_{k=1}^{n} \Pi_k$.

Mais $\Pi_k \Pi_\ell = P_k P_\ell \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} (u-\lambda_i)^{\alpha_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{m} (u-\lambda_j)^{\alpha_j}$ ... ça contient $\Pi_u(u)$
$k \neq 1$

$\Rightarrow \Pi_k \Pi_\ell = 0$.

$id = \Pi_1 + \dots + \Pi_m \Rightarrow \Pi_k = \Pi_k \, id = \Pi_k (\Pi_1 + \dots + \Pi_m) = \Pi_k^2$.

Les $\Pi_k$ sont des projecteurs.

Regardons $\mathrm{Im}\, \Pi_k$

Pour la même raison que ci-dessus $(u - \lambda_k id)^{\alpha_k} \circ \Pi_k = 0$ donc $\mathrm{Im}\, \Pi_k \subset \ker (u-\lambda_k)^{\alpha_k}$. Inversement, si $(u-\lambda_k)^{\alpha_k}(x) = 0$ alors pour $i \neq k$ $Q_i(u)$ contient $(u - \lambda_k id)^{\alpha_k}$ donc $Q_i(u)(x) = 0$.

$\Rightarrow x = \sum_i \Pi_i x = \Pi_k x \Rightarrow x \in \mathrm{Im}\, \Pi_k$.

Donc $\mathrm{Im}\, \Pi_k = \ker (u-\lambda_k)^{\alpha_k}$.

Et $\ker \Pi_k$ ?

On a $E = \bigoplus \mathrm{Im}\, \Pi_\ell$ et $\Pi_k \Pi_\ell = 0$ $\ell \neq k$. $\Rightarrow \ker \Pi_k = \bigoplus_{\ell \neq k} \ker (u-\lambda_\ell)^{\alpha_\ell}$

$\Pi_k$ est le proj. sur $\ker (u-\lambda_k)^{\alpha_k}$, parallèlement aux autres ss-esp-caract.

On pose $d = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Pi_k$. Alors $d$ est diagble.

On pose $n = u - d$. Alors sur $\mathrm{Im}\, \Pi_k$, on a $n^{\alpha_k}(x) = (u-d)^{\alpha_k} x = (u-\lambda_k)^{\alpha_k} x$
$= 0$.

Donc $n$ nilpotent. Et comme $d$ et $n$ sont des pol. en $u$, ils commutent.
On a la dec. de Dunford !

Un exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2, \text{ mais } (A-I)(A-2I) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi_A(X) = (X-1)(X-2)^2.$$

$$\frac{1}{\Pi_A(X)} = \frac{1}{X-1} + \frac{3-X}{(X-2)^2} \iff 1 = (X-2)^2 + (X-1)(3-X)$$

$$\Pi_1 = (A-2I)^2, \quad \Pi_2 = (A-I)(3I-A)$$

$d = \Pi_1 + 2\Pi_2$, $n = u - d$.

Notez que $n^2 = 0$ du coup.

Donc $u^m = (n+d)^m = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} n^\ell d^{m-\ell} = d^m + m\, n\, d^{m-1}$. facile à calculer !

$$\begin{vmatrix} 1-X & 0 & -3 \\ 1 & -1-X & -6 \\ -1 & 2 & 5-X \end{vmatrix} = (1-X)\left[(-1-X)(5-X)+12\right] - 3\left(2-(1-X)\right)$$
$$= (1-X)\left(X^2-4X+7\right) - 3(X-1)$$
$$= (1-X)(X^2-4X+4) = (1-X)(X-2)^2$$

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \cdots & \\ & \cdots & \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$(X-2)^2 + (3-X)(X-1) = X^2-4X+4 - X^2 - 4X - 3 = 1.$$

$$\Pi_1 = (A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2 = (A-I)(3I-A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d = \Pi_1 + 2\Pi_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 6 \\ -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 \\ 3 & -6 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

## 7) Décomposition de Jordan.

Un bloc de Jordan :

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

On a $(J_{\lambda,n} - \lambda I)^k = \begin{array}{c} \quad\quad\quad k \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ si $0 \leq k \leq n-1$.

$\neq 0$, nul pour $k = n$.

$J_{\lambda,n} - \mu I$ inversible si $\mu \neq \lambda$.

$\chi_{J_{\lambda,n}} = (X-\lambda)^n = \pi_{J_{\lambda,n}}$

Une matrice de Jordan : $\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$

Elle est diagble ssi les blocs sont tous de taille 1.

Soit $u$ nilpotente. Soit $x \in E$ et $m$ le premier entier tq $u^m(x) = 0$. Alors $\{x, u(x), \dots, u^{m-1}(x)\}$ est libre.

<u>Dem</u> : Si $\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{m-1} u^{m-1}(x) = 0$ et que $\lambda_k$ est le premier coeff non nul : on applique $u^{m-k-1} \Rightarrow \lambda_k u^{m-1}(x) = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0$. Impossible. $\square$

L'espace vect$\{x, u(x), \dots, u^{m-1}(x)\}$ est stable par $u$ et la matrice de $u$ ds $\{u^{m-1}(x), \dots, u(x), x\}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $u$ qcq avec pol. caract scindé. Alors on a Dunford, i.e. la décomposition de $u$ sur les s-esp. caract en $d+n$, i.e. en $\lambda_k \, id + n$. Il suffit de raisonner par blocs ; il suffit de faire le cas nilpotent. Ce qui est fait.

## Thm

Si $\chi_u$ est scindé, alors il existe une base où $u$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_k \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Retour à l'exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Les sous esp. caract : $\ker(A - I) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ker(A-2I)^2 = \{2x - 3y - 3z = 0\}$.

On prend un $\vec{v.p.}$ de $A$ pour v.p. 2 : $\begin{matrix} x - 3z = 2x \\ x - y - 6z = 2y \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x = -3z \\ 3y = -9z \end{matrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{A-2I} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$