Chapter 1

Premier contact avec l'analyse

Ce chapitre est essentiellement un chapitre de rappel de la terminale, l'esprit de l'enseignement supérieur y apparaît néanmoins dans le fait qu'on démontre tout.

1.1 Inégalités dans $\mathbb{R}$

1.1.1 Les ensembles usuels de nombres

On rappelle les notations usuelles pour les ensembles de nombres :
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels positifs $\{0, 1, 2, \ldots\}$,
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels, i.e. l'ensembles des fractions

$$\frac{a}{b},$$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les réels.
Pour chacun de ces ensembles, l'ajout de $*$ signifie que l'on exclut 0 de l'ensemble : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$.
$\mathbb{Q}_+$ est l'ensemble des rationnels positifs, etc.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un ensemble déjà bien fourni de nombres. Par exemple, entre deux rationnels $q < p$ quelconques il y a une infinité de rationnels. En effet $p' = (p+q)/2$ est rationnel encore et vérifie $q < p' < p$. Ainsi de suite on peut en construire une infinité entre q et p.

Avec cette remarque, on voit qu'aucun rationnel $q \in \mathbb{Q}$ n'admet de "suivant" dans $\mathbb{Q}$. En effet, si on regarde l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{p \in \mathbb{Q}\,;\ p > q\}$$

alors $\mathcal{A}$ n'a pas de plus petit élément. En effet, sinon cet élément p vérifie $q < p$ et on peut construire $q < p' < p$ et contredire le fait que p est le plus petit.

Une autre façon de dire la même chose : dans n'importe quel intervalle (rationnel) autour d'un rationnel q il y a une infinité de rationnels.

Et pourtant les rationnels sont loins d'être suffisants, la diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel. C'est un résultat qui avait déjà été remarqué en Grèce antique. Démontrons-le. Si $\sqrt{2}$ est un rationnel a/b, que l'on peut toujours supposer être sous forme réduite, i.e. sans diviseur commun. On a

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi a^2 est pair, ce qui implique que a est pair (le carré d'un impair est impair). Donc $a = 2k$, ce qui donne $b^2 = 2k^2$ et b est pair aussi. Ce qui contredit l'hypothèse initiale de primalité entre a et b. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. C'est d'ailleurs le cas de toutes les racines carrées qui ne sont pas des entiers (non démontré ici, exercice pour les plus motivés).

De toute évidence il faut plus que les rationnels. Ce qui, soit dit en passant, était une surprise il y a moins de 3000 ans. Il faut ce qu'on appelle le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, que l'on connait bien intuitivement mais qui admet une vraie définition et une construction rigoureuse dont nous ne parlerons pas vraiment dans ce cours. Beaucoup des propriétés de $\mathbb{R}$ nous paraissent archi-naturelles, on en a une vraie intuition. Mais pourtant, mathématiquement, il a fallu construire le corps des réels, prouver ses propriétés intuitives etc. Ce ne sera pas notre but dans ce programme de détailler cette construction, mais de temps en temps pointer à vos yeux que certaines propriétés des réels ne sont pas du tout évidentes, en fait.

1.1.2 La relation d'ordre de $\mathbb{R}$

Un outil fondamental de l'analyse, que l'on utilise en permanence (et qui pose énormément de problèmes aux étudiants) c'est la manipulation d'inégalités. Revoyons quelques règles de base.

Sur $\mathbb{R}$ on a les inégalités usuelles de comparaison entre nombres : $\leq$, $\geq$, $<$, $>$. En fait il suffit de se concentrer sur une seule $\leq$, car les autres s'en déduisent facilement :

i) $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$,

ii) $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$,

iii) $x > y \Leftrightarrow y < x$.

Les propriétés fondamentales sont alors les suivantes :

Définition 1 *Sur $\mathbb{R}$ la relation $\leq$ vérifie les propriétés suivantes :*
1) Reflexivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$.
2) Antisymétrie : Si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$.
3) Transitivité : Si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.
4) Si $x \leq y$ et si $z \in \mathbb{R}$ alors $x + z \leq y + z$.
5) Si $x \leq y$ et si $z \geq 0$ alors $xz \leq yz$.

En fait ces propriétés ne se démontrent pas, elles sont axiomatiques de la construction des réels et de la relation d'ordre $\leq$.

Par contre les propriétés suivantes se déduisent maintenant facilement.

Proposition 1.1.1 *On a les propriétés suivantes.*
1) Si $x \leq y$ alors $-x \geq -y$.
2) Si $x \leq y$ et $z \leq 0$ alors $xz \geq yz$.
3) On a des propriétés analogues avec $<$:

$$\begin{aligned} x < y &\Longrightarrow -x > -y \\ x < y \text{ et } z > 0 &\Longrightarrow xz < yz \text{ ...etc} \end{aligned}$$

Démonstration

$$\begin{array}{ll} 1) & x \leq y \Longrightarrow x - x \leq y - x \Longrightarrow 0 \leq y - x \Longrightarrow -y \leq -x\,. \\ 2) & -z \geq 0 \Longrightarrow (-z)x \leq (-z)y \Longrightarrow -zx \leq -zy \Longrightarrow zx \geq zy\,. \\ 3) & x < y \text{ et } z > 0 \Longrightarrow xz \leq yz \text{ et } xz \neq yz \Longrightarrow xz < yz \,... \end{array}$$

□

Proposition 1.1.2 *Si $0 < x \leq y$ ou si $x \leq y < 0$ alors*

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}\,.$$

Démonstration En fait c'est juste la définition du fait que la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Mais en essayant d'utiliser que ce qu'on a vu jusqu'à maintenant, c'est le raisonnement suivant. Si $0 < x \leq y$ on multiplie par $1/y$ de chaque côté : $x/y \leq 1$ puis par $1/x$ de chaque côté : $1/y \leq 1/x$.

Dans le cas négatif, c'est la même chose, sauf qu'on change deux fois le sens des inégalités. D'où le même résultat. □

Attention, ce résultat est faux pour $x \leq y$ quelconques, en fait pour $x < 0 < y$. En effet, on a $-2 < 2$ et pourtant $-1/2 < 1/2$.

On pourrait faire une liste sans fin d'utilisation des inégalités. Par exemple :

Si $x \leq y$ et $a \leq b$ alors $x + a \leq y + b$. Par contre, on ne peut pas dire $ax \leq by$ (faire dem., trouver contre-exemple).

Ce qui compte c'est de bien les manipuler, de ne pas inventer des propriétés, de bien vérifier vos étapes de raisonnement.

1.1.3 Majorant, minorant

Définition 2 *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (i.e. $A \subset \mathbb{R}$). Un* majorant *de A est un élément $m \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq m$ pour tout $a \in A$. Si le sous-ensemble A admet un majorant, ce qui n'est pas toujours le cas, on dit que A est* borné supérieurement*, ou que A est* majoré*. De même un* minorant *de A est un élément $n \in \mathbb{R}$ tel que $a \geq n$ pour tout $a \in A$. Si le sous-ensemble A admet un minorant, ce qui n'est pas toujours le cas, on dit que A est* borné inférieurement*, ou que A est* minoré*.*

On dit que A admet un élément maximal *s'il admet un majorant qui appartient à A. Autrement dit s'il existe $a_0 \in A$ tel que $a \leq a_0$ pour tout $a \in A$. Un tel a_0 est forcement unique (exercice), on le note* $\max A$*. De même on dit que A admet un élément* minimal *s'il admet un minorant qui appartient à A. Autrement dit s'il existe $a_1 \in A$ tel que $a \geq a_1$ pour tout $a \in A$. Un tel a_1 est forcement unique (exercice), on le note* $\min A$*.*

Dans le cas $A =]-1, 1]$. Cet ensemble est majoré et minoré. On a $\max A = 1$, pas de min.

Dans le cas $A = [2, +\infty[$. Cet ensemble est minoré, mais pas majoré. On a pas de max, mais $\min A = 2$.

Pour le cas $A = \{q \in \mathbb{Q}\,;\ q^2 < 2\}$, cet ensemble est majoré et minoré. Il n'a pas de max, pas de min.

1.1.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 3 *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un* intervalle *si, dès qu'elle contient deux réels a, b, elle contient tous les réels compris entre a et b :*

$$\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I\,.$$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont forcément d'une des formes suivantes :

$[a, b]\,,\ ]a, b]\,,\ [a, b[\,,\ ]a, b[\,,\ ]-\infty, a]\,,\ ]-\infty, a[\,,\ [a, +\infty[\,,\ ]a, +\infty[\,,\ \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\,,$

avec les notations usuelles ; par exemple

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R}\,;\ a < x \leq b\}\,,$$

etc.

1.1.5 Valeur absolue

Définition 4 *On rappelle que pour* $x \in \mathbb{R}$ *on pose*

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{si } x \geq 0\,, \\ -x & \textit{si } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Remarquez que dans tous les cas on a

$$x \leq |x| \qquad \textit{et} \qquad -x \leq |x|\ .$$

Proposition 1.1.3 *On a*

$$|x| \leq M$$

si et seulement si

$$-M \leq x \leq M\,.$$

Démonstration Si $|x| \leq M$ alors $M \geq 0$ et

$$\begin{cases} x \leq M & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x \leq M & \text{si } x < 0\,, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} -M \leq x \leq M & \text{si } x \geq 0\,, \\ -M \leq x \leq M & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Inversement, si $-M \leq x \leq M$ alors $M \geq 0$ mais aussi $-M \leq -x \leq M$. D'où $|x| \leq M$ dans tous les cas. □

Une autre forme qui apparaît souvent est la suivante.

Proposition 1.1.4 *On a*

$$|x - a| \leq \varepsilon$$

si et seulement si

$$a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon\,.$$

La démonstration est laissée en exercice.

On alors des propriétés faciles.

Proposition 1.1.5
1) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|xy| = |x|\ |y|\ .$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^*$,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}\,.$$

La démonstration est laissée en exercice.

Proposition 1.1.6 (Inégalité triangulaire) *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a*

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|\ .$$

Démonstration On a $|a + b| = a+b$ ou $-a-b$, qui sont tous deux $\leq |a|+|b|$. Ce qui prouve la première inégalité.

Ensuite, supposons que $|a| \geq |b|$ (sinon, on échange les rôles). Alors

$$||a| - |b|| = |a| - |b| = |a + b - b| - |b| \leq |a + b| + |b| - |b| = |a + b|\ .$$

□

Définition 5 *Rappelons au passage quelques notations utiles :*

$$x^+ = \max\{x, 0\}, \quad x^- = \max\{-x, 0\}\,.$$

Tous deux sont positifs et on a

$$\begin{cases} x = x^+ - x^-\ , \\ |x| = x^+ - x^-\ . \end{cases}$$

1.2 Généralités sur les fonctions

1.2.1 Définitions de base, terminologie

Définition 6 *Une* fonction réelle *est une application f d'un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $A \subset \mathbb{R}$. C'est à dire qu'à tout élément $x \in D$ la fonction f associe une valeur $f(x) \in A$. On note ça :*

$$\begin{array}{cccc} f & : & D & \longrightarrow & A \\ & & x & \longmapsto & f(x)\,. \end{array}$$

On note f la fonction et $f(x)$ sa valeur au point x. Pour parler d'une fonction précise on peut par exemple parler de la fonction $x \mapsto x^2$.

*Pour un $x \in D$, la valeur $y = f(x) \in A$ est l'*image *de x par f. Inversement x est l'*antécédent *de y.*

L'ensemble D est le domaine *de f, c'est l'ensemble des points où la fonction est bien définie. On le note souvent* $\mathrm{Dom}\ f$.

L'ensemble

$$\{f(x)\,;\ x \in D\}$$

*est l'*image *de f, on le note* $\mathrm{Im}\ f$ *ou* $\mathrm{Ran}\ f$.

Plus généralement, pour tout ensemble $E \subset \mathrm{Dom}\ f$ on note

$$f(E) = \{f(x)\,;\ x \in E\}\,.$$

Pour tout ensemble $F \subset \mathrm{Im}\ f$ on note

$$f^{-1}(F) = \{x \in \mathrm{Dom}\ f\,;\ f(x) \in F\}\,.$$

Enfin, le graphe *de f est l'ensemble*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))\,;\ x \in \mathrm{Dom}\ f\}\,.$$

Définition 7 *Une fonction f est dite* injective *si pour tout $x \neq y \in \mathrm{Dom}\ f$ on a $f(x) \neq f(y)$. Cela veut dire en particulier que tout $y \in \mathrm{Ran}\ f$ a un unique antécédent.*

Une fonction f est dite surjective sur $A \subset \mathbb{R}$ *si pour tout $y \in A$ il existe $x \in \mathrm{Dom}\ f$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, si tout élément de A admet un antécédent.*

Une fonction $f\ : D \to A$ est dite bijective *si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, pour tout $y \in A$ il existe un unique $x \in D$ tel que $f(x) = y$. Cet unique x associé à y est noté $f^{-1}(y)$. On définit ainsi une nouvelle fonction*

$$\begin{array}{rcccc} f^{-1} & : & A & \longrightarrow & D \\ & & y & \longmapsto & f^{-1}(x)\,. \end{array}$$

Notez bien la relation importante

$$x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y\,.$$

La fonction f^{-1} est la fonction réciproque *de f.*

Notez que f^{-1} est alors aussi bijective (exercice) et que $(f^{-1})^{-1} = f$ (exercice).

Proposition 1.2.1 *Si f est bijective alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite $(y = x)$.*

Démonstration Soit (a, b) un point de Γ_f, c'est à dire que $a \in \mathrm{Dom}\, f$ et $b = f(a)$. Le symétrique de ce point par rapport à $(y = x)$ est le point (b, a), c'est à dire $(b, f^{-1}(b))$. C'est donc bien un point de $\Gamma_{f^{-1}}$. Ainsi le symétrique de Γ_f est inclus dans $\Gamma_{f^{-1}}$.

Avec un raisonnement en tout point similaire on voit que le symétrique de $\Gamma_{f^{-1}}$ est inclus dans Γ_f. On conclut facilement. $\square$

Définition 8 *Soient f et g deux fonctions réelles telles que* $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Dom}\, g$. *On peut alors définir la fonction* composée

$$\begin{array}{rccc} g \circ f & : & \mathrm{Dom}\, f & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, g \\ & & x & \longmapsto & g(f(x)) \,. \end{array}$$

Notez que, si f est bijective alors $f^{-1} \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Dom}\, f$ et que $f \circ f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in \mathrm{Ran}\, f$.

Définition 9 *On dit qu'une fonction $f : D \to A$ est* croissante *si pour tout $x < y \in D$ on a $f(x) \leq f(y)$. Elle est* strictement croissante *si pour tout $x < y \in D$ on a $f(x) < f(y)$.*

On dit qu'une fonction $f : D \to A$ est décroissante *si pour tout $x < y \in D$ on a $f(x) \geq f(y)$. Elle est* strictement décroissante *si pour tout $x < y \in D$ on a $af(x) > f(y)$.*

Dans tous les cas on dit que f est monotone, *resp.* strictement monotone.

Vous noterez qu'une fonction strictement monotone est injective. Le contraire n'est pas vrai, je vous laisse trouver tout seul un contre exemple.

Une fonction f est majorée *si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathrm{Dom}\, f$. Elle est* minorée *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in \mathrm{Dom}\, f$. Elle est* bornée *si elle est à la fois majorée et minorée.*

1.2.2 Actions sur les graphes

Avant de voir une liste de fonctions usuelles, il est important de se rappeler l'effet sur le graphe de f de certaines transformations élémentaires. On part d'une fonction f quelconque qui restera en bleu dans les autres graphiques.

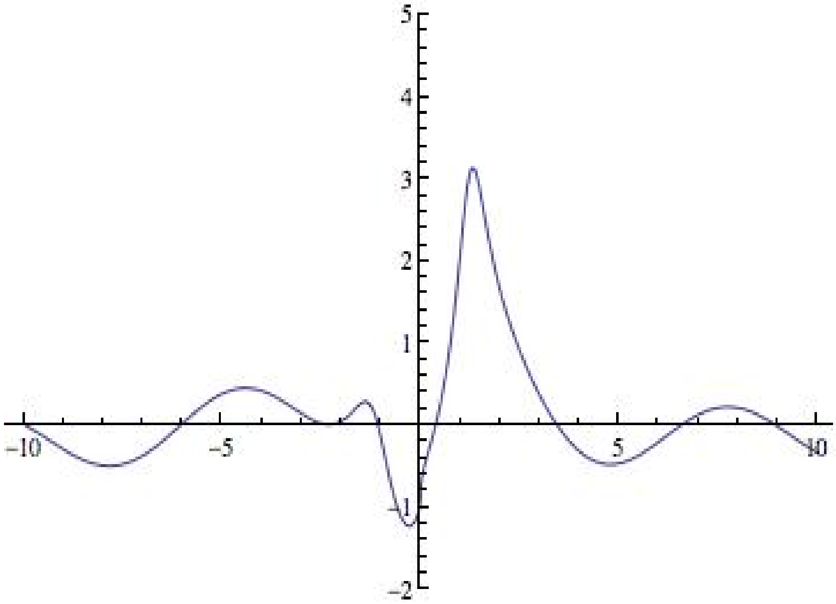

Figure 1.1: $f(x)$

1er cas : $g(x) = f(a + x)$

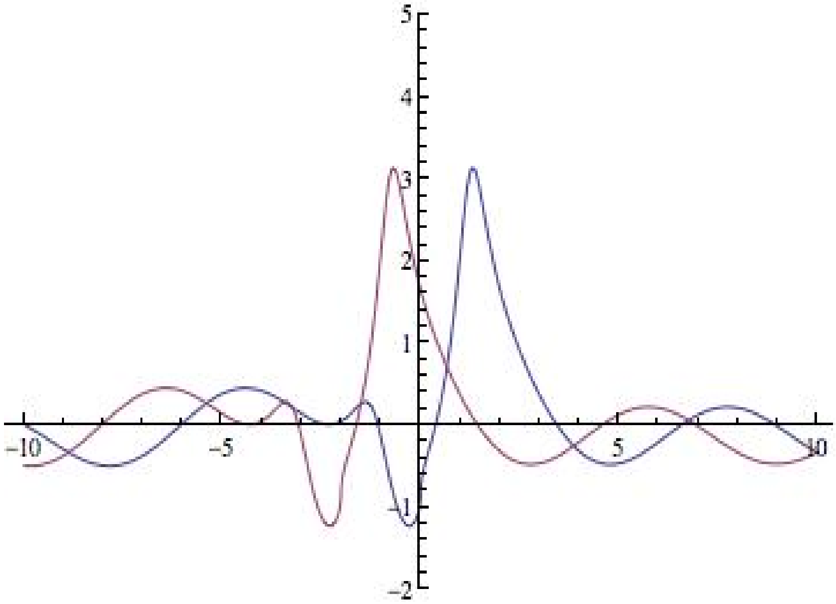

Figure 1.2: $f(a + x)$, avec $a > 0$

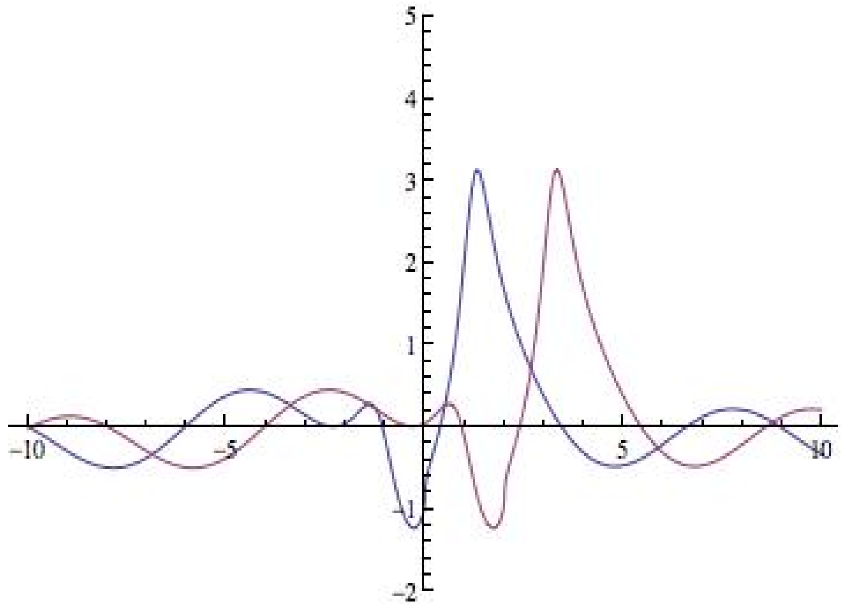

Figure 1.3: $f(a+x)$, avec $a<0$

2ème cas : $g(x)=f(x)+a$

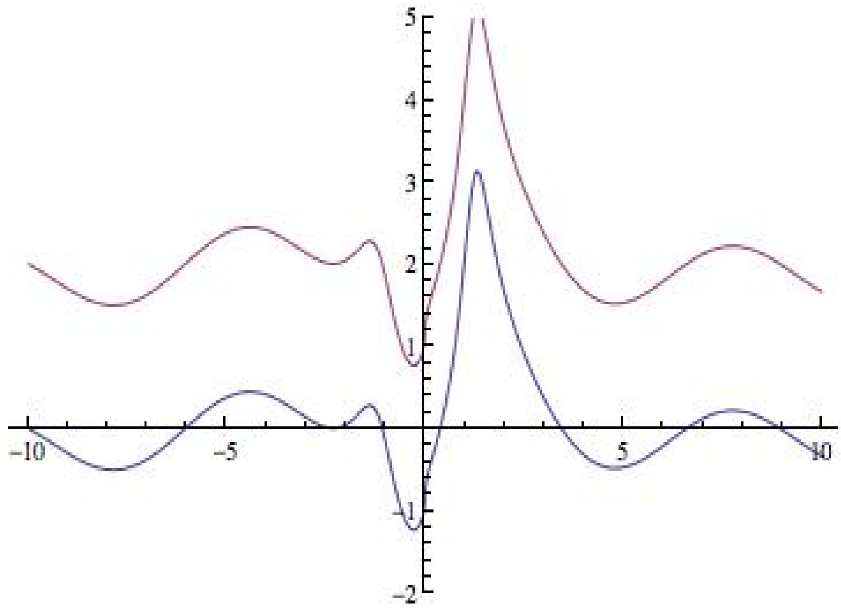

Figure 1.4: $f(x)+a$, avec $a>0$

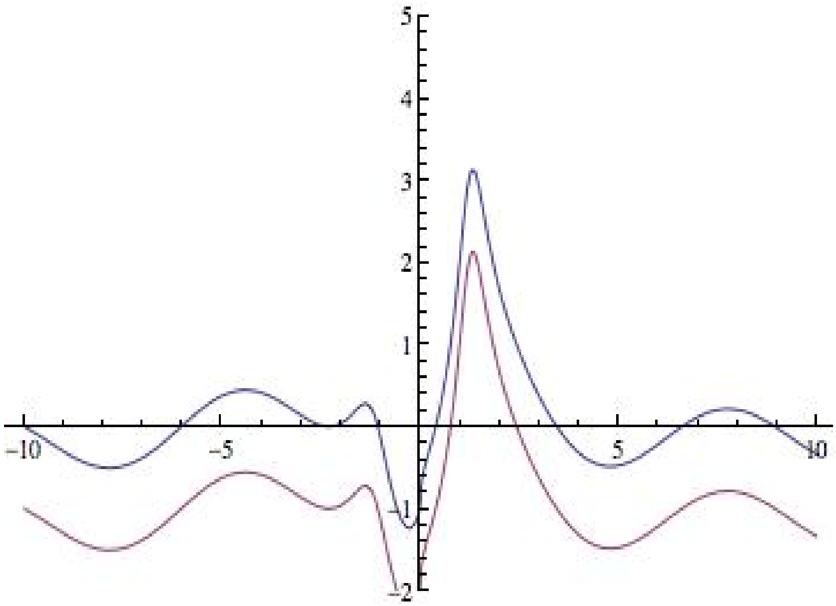

Figure 1.5: $f(x) + a$, avec $a < 0$

3ème cas : $g(x) = f(-x)$

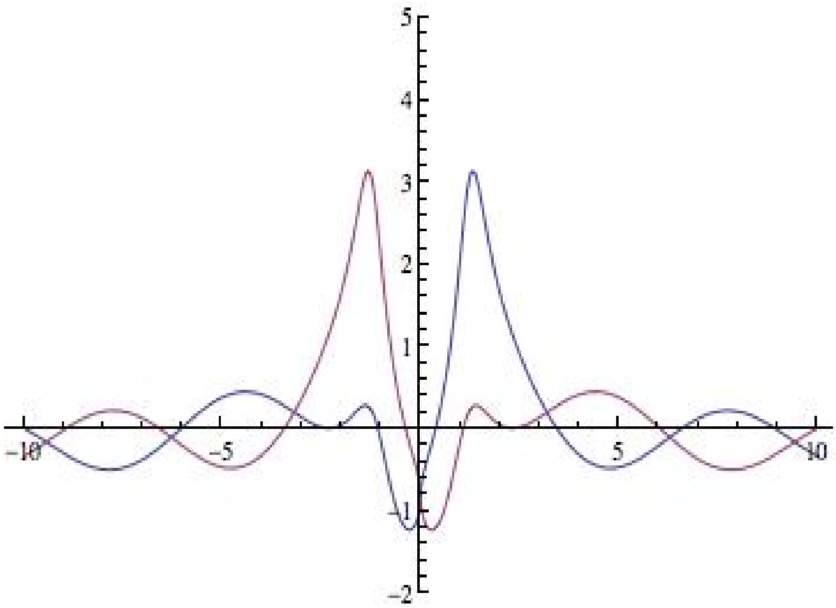

Figure 1.6: $f(-x)$

et du coup $g(x) = f(a - x)$ en combinant les 2 cas :

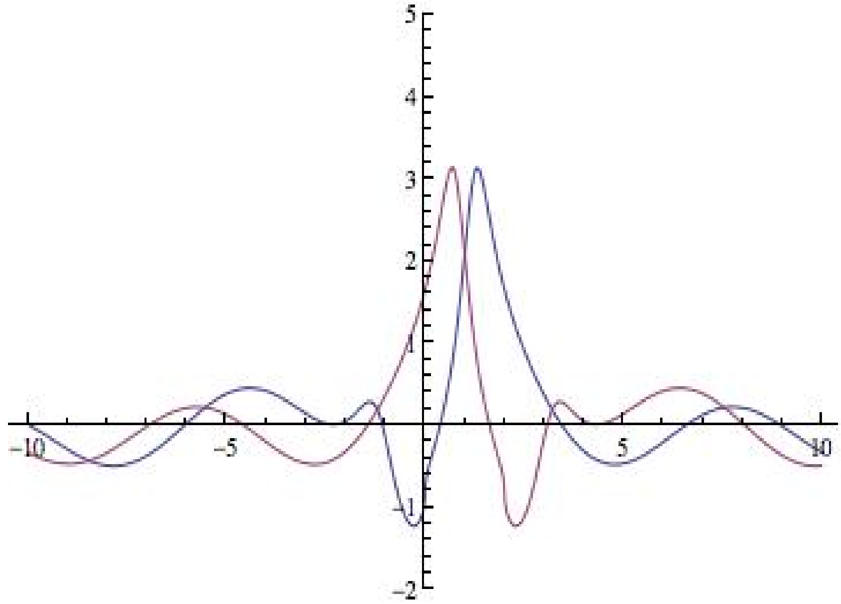

Figure 1.7: $f(a-x)$, avec $a > 0$

4ème cas : $g(x) = f(ax)$

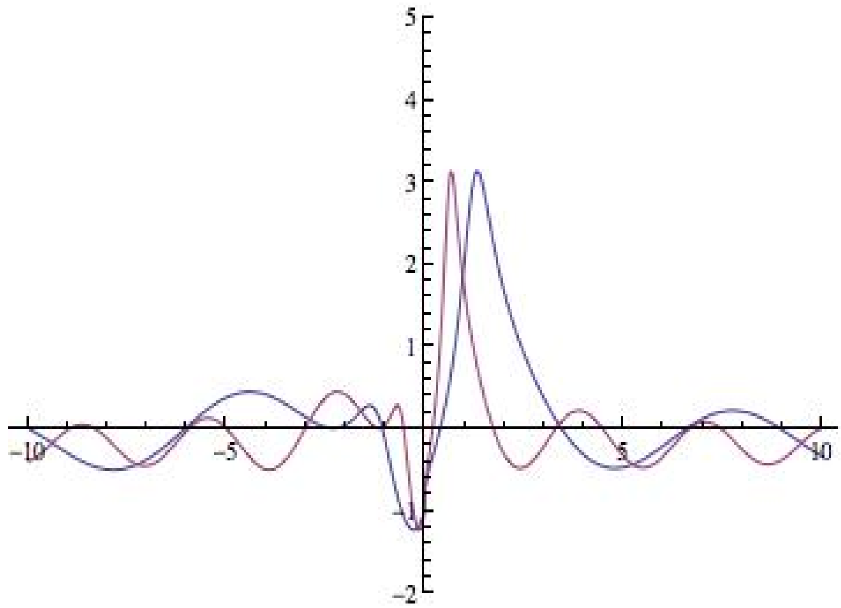

Figure 1.8: $f(ax)$, avec $a > 1$

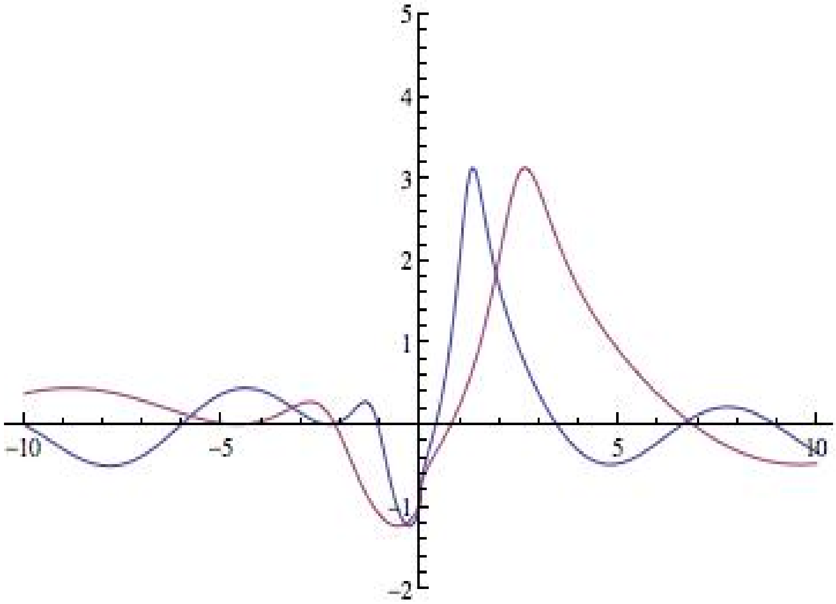

Figure 1.9: $f(ax)$, avec $0 < a < 1$

5ème cas : $g(x) = af(x)$

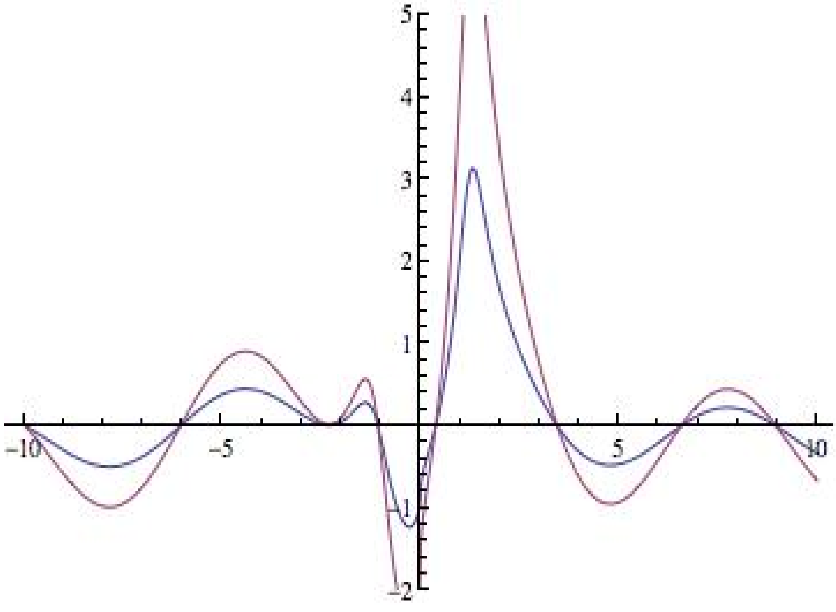

Figure 1.10: $af(x)$, avec $a > 1$

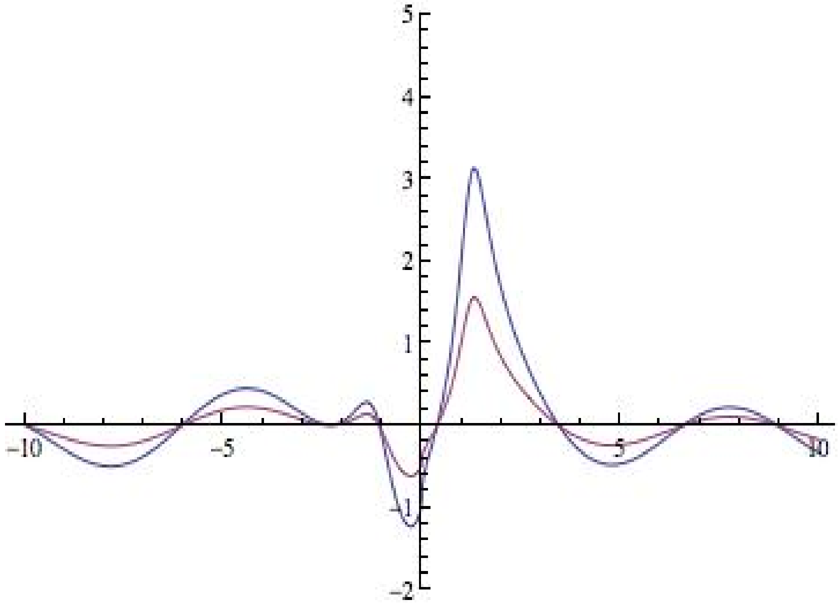

Figure 1.11: $af(x)$, avec $0 < a < 1$

6ème cas : $g(x) = -f(x)$

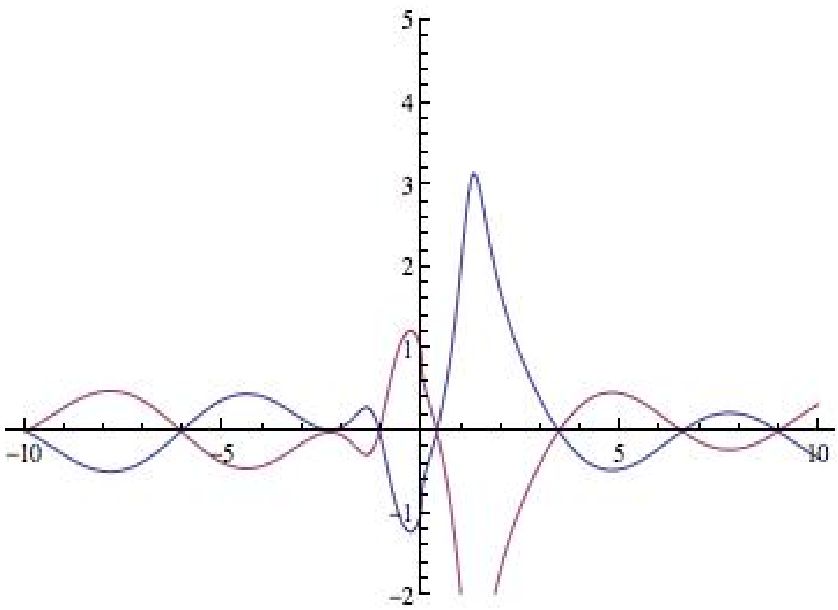

Figure 1.12: $-f(x)$

1.3 Dérivabilité

1.3.1 Dérivabilité en un point

Définition 10 *Soit f une fonction réelle et $a \in \mathrm{Dom}\, f$. On dit que f est* dérivable *en a si*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'(a)$, la dérivée *de f au point a. Souvent on écrit la condition ci-dessus plutôt sous la forme*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(a)\,.$$

De la même façon on définit les fonctions dérivables à gauche *en a,* dérivables à droite *en a. On parle alors de* dérivée à gauche *et de* dérivée à droite*, parfois notées $f'(a-)$, $f'(a+)$.*

Par exemple, $x \mapsto x^3$ est dérivable en 2 car

$$\frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = 12+6h+h^2\,,$$

qui converge vers 12 quand h tend vers 0.

Par contre $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 car

$$\frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h}$$

tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0.

La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche car, quand h est < 0

$$\frac{|h|-|0|}{h} = \frac{-h}{h} = 1\,.$$

Donc sa dérivée à gauche est -1. De même, elle est dérivable à droite, de dérivée à droite 1. Par contre elle n'est pas dérivable en 0.

La quantité

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

représente le taux d'accroissement de f sur l'intervalle $[a, a+h]$ (ou $[a+h, a]$).

Dans la limite $h \to 0$ on obtient la pente de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$. En particulier, l'équation de la tangente en ce point est

$$y = (x-a)f'(a) + f(a)\,.$$

Définition 11 *Si f est dérivable en tout point d'un intervalle I, alors on peut considérer la fonction $x \mapsto f'(x)$ qui est définie sur I. C'est la* fonction dérivée *de f.*

Si f' est elle-même dérivable sur I, on note f" la fonction dérivée de f', c'est la dérivée seconde *de f. On dit que f est* 2 fois dérivable *sur I.*

Ainsi de suite, par récurrence, si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I on note $f^{(n)}$ sa dérivée. On parle de dérivée n-ième *de f. On dit que f est* n fois dérivable.

Si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est indéfiniment dérivable *sur I.*

Pour mémoire, quelques dérivées usuelles.

Fonction	**Domaine de définition**	**Domaine de dérivabilité**	**Dérivée**
$x^n\ ,\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x^n\ ,\ n \in \mathbb{Z}_-$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$	$\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

1.3.2 Opérations sur les dérivées

On a tout d'abord les opérations usuelles (résultats bien connus).

Théorème 1.3.1 *Si f et g sont dérivables au point a alors $f+g$ et fg le sont aussi avec*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \qquad \text{et} \qquad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$

Si de plus $g(a) \neq 0$ alors f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\,.$$

On fera les démonstrations détaillées plus tard dans le cours. On a ensuite des résultats bien plus nouveaux pour vous (démontrés plus tard aussi).

Théorème 1.3.2

1) Si g est dérivable au point a et si f est dérivable au point $b = g(a)$ alors $f \circ g$ est dérivable au point a et

$$(f \circ g)'(a) = g'(a)\, f'(g(a))\,.$$

2) Si f est bijective, continue, dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\,.$$

Le dernier théorème vaut vraiment le coup qu'on s'y arrête et que l'on voit quelques exemples. Tout d'abord sur la dérivée de fonctions composées.
– La dérivée de la fonction $x \mapsto (f(x))^n$ est donc

$$nf'(x)(f(x))^{n-1}\,.$$

– La dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est donc

$$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,.$$

– La dérivée de la fonction $x \mapsto e^{f(x)}$ est donc

$$f'(x)\, e^{f(x)}\,.$$

Voyons maintenant des exemples avec $(f^{-1})'$.
– La fonction $f : x \mapsto x^2$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Sa fonction réciproque est $f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. La dérivée de f ne s'annule qu'en 0. Donc $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

– La fonction $f : x \mapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Sa fonction réciproque est $f^{-1} : x \mapsto \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. La dérivée de f ne s'annule pas. Donc $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}\,.$$

Chapter 2

Fonctions usuelles

Le but de ce chapitre est de voir ou revoir les fonctions les plus connues, celles qui servent le plus souvent, de rappeler leurs propriétés.

2.1 Logarithme, exponentielle, puissance

2.1.1 Logarithme

Définition 12 *La fonction* logarithme népérien *est la fonction* ln*, définie sur* $\mathbb{R}_+^*$*, qui est l'unique primitive de* $1/x$ *qui s'annule en 1. Autrement dit*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\,.$$

On a alors les propriétés suivantes.

Proposition 2.1.1
1) On a $\ln(1) = 0$*.*
2) La fonction ln *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*, de dérivée* $1/x$*.*
3) La fonction ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*
4) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *on a*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\,.$$

5) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *on a*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)\,.$$

6) Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\ln(x^n) = n \ln(x)\,.$$

7) Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)\,.$$

Démonstration La seule propriété qui demande à être un peu détaillée est la 4).

Soit a fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \ln(ax)$ est dérivable, de dérivée

$$\frac{a}{ax} = \frac{1}{x} = \ln'(x)\,,$$

et ce pour tout x. Donc $\ln(x)$ et $\ln(ax)$ sont des fonctions qui ne diffèrent que par une constante additive :

$$\ln(ax) = \ln(x) + \lambda\,.$$

En prenant $x = 1$ on trouve $\lambda = \ln(a)$.

Pour la 5) on fait

$$\ln(x) = \ln\left(\frac{x}{y}y\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln(y)\,.$$

D'où le résultat.

Toutes les autres propriétés se démontrent facilement. □

Proposition 2.1.2

1) $$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\,.$$

2) $$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty\,.$$

3) $$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1\,.$$

Démonstration

1) La fonction ln est croissante, donc soit elle est majorée et tend vers une limite finie, soit elle est non majorée et tend vers $+\infty$. Prenons $a > 1$, donc $\ln(a) > 0$, on a $\ln(a^n) = n\ln(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc ln est non majorée.

2) On a $\ln(x) = -\ln(1/x)$ et on conclut facilement avec 1).

3) C'est juste la dérivabilité et la dérivée en 1. □

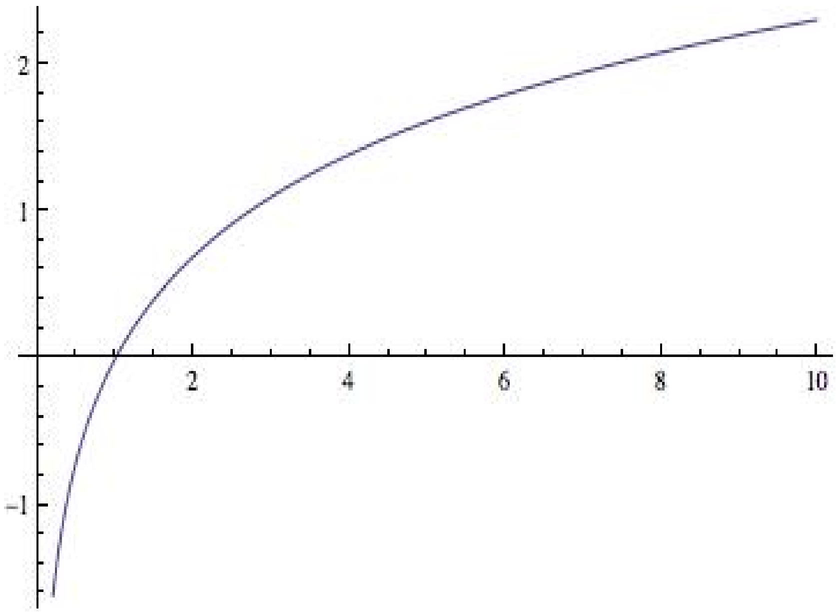

Figure 2.1: $x \mapsto \ln(x)$

2.1.2 Exponentielle

Définition 13 *La fonction* ln *est continue, strictement croissante, donc injective. Son domaine est* $\mathbb{R}^{+*}$*, son image est* $\mathbb{R}$*. Elle admet donc une fonction réciproque, notée* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$*. C'est la fonction* exponentielle.

Proposition 2.1.3

1) La fonction exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* $\exp' = \exp$.

2) $\exp(0) = 1$

3) pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\,.$$

4) pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}\,.$$

5) pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}\,.$$

6) pour tout $x \in \mathbb{R}$*, tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(nx) = \exp(x)^n\,.$$

Démonstration

1) c'est la dérivée de fonction réciproque.

2) est évident.

3) En prenant les ln de chaque membre, on trouve d'un côté $\ln(\exp(x+y)) = x+y$ et de l'autre côté $\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(exp(x)) + \ln(exp(y)) = x+y$. On conclut facilement car ln est bijective.

4) $\exp(x-y)\exp(y) = \exp(x-y+y) = \exp(x)$.

5) et 6) sont maintenant faciles. □

Proposition 2.1.4

1) $$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty\,.$$

2) $$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0\,.$$

3) $$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1\,.$$

Démonstration Tout ça se déduit facilement des propriétés équivalentes de la fonction ln, ou bien de la dérivée de exp. □

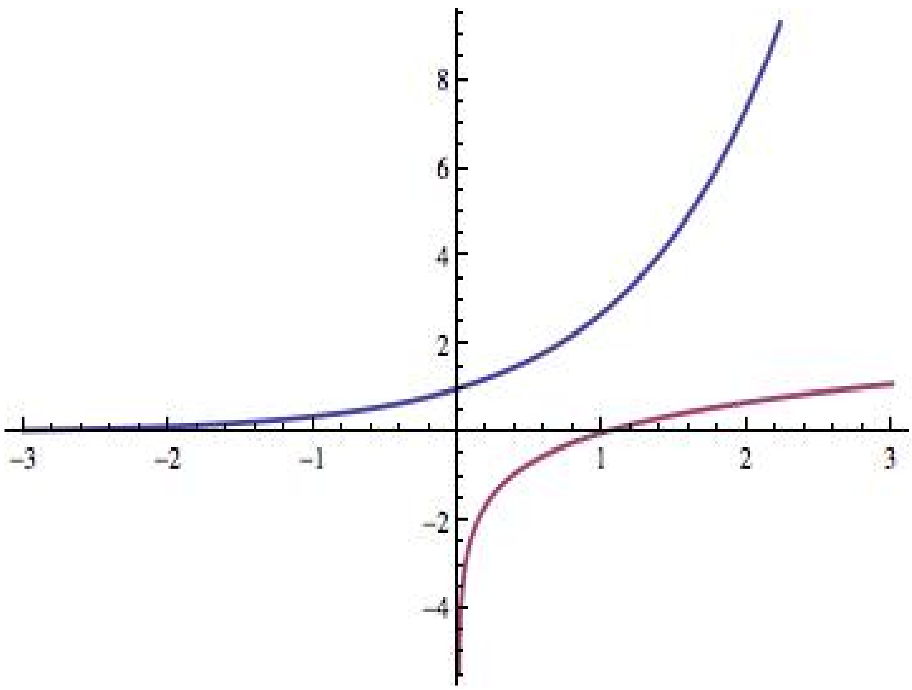

Figure 2.2: $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$

2.1.3 Fonctions puissances

On va définir les fonctions puissances, i.e. $x \mapsto x^\alpha$ pour n'importe quelle puissance réelle α. Vous connaissez certainement les puissances entières et leurs propriétés, voici quelques rappels. D'abord des propriétés fondamentales :

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 \\ 1^n &= 1 \\ x^{n+m} &= x^n\, x^m \\ x^{nm} &= (x^n)^m\,. \end{aligned}$$

Ensuite les graphes.

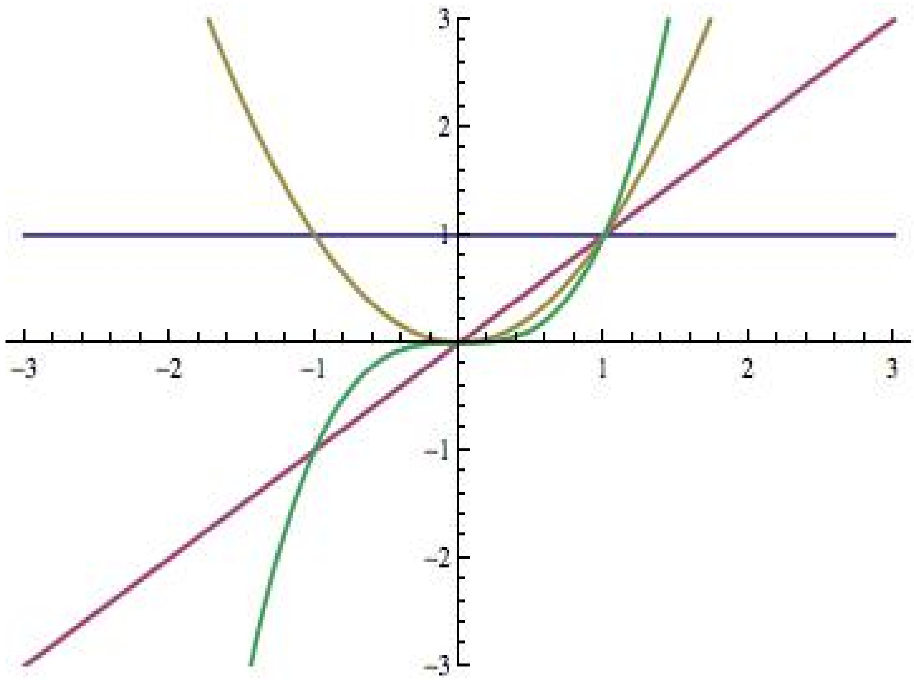

Figure 2.3: $f(x) = x^0$, $f(x) = x^1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$

Le principe de base dans les définitions et les notations des autres fonctions puissances c'est qu'on garde toutes les propriétés ci-dessus vraies pour toutes les autres puissances.

Par exemple,

$$x^{-n}x^n = x^{-n+n} = x^0 = 1\,,$$

donc

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}\,.$$

On a ainsi les puissances entières négatives, inverses de puissances entières : $f(x) = x^{-n}$, pour un $n \in \mathbb{N}$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}^*$.

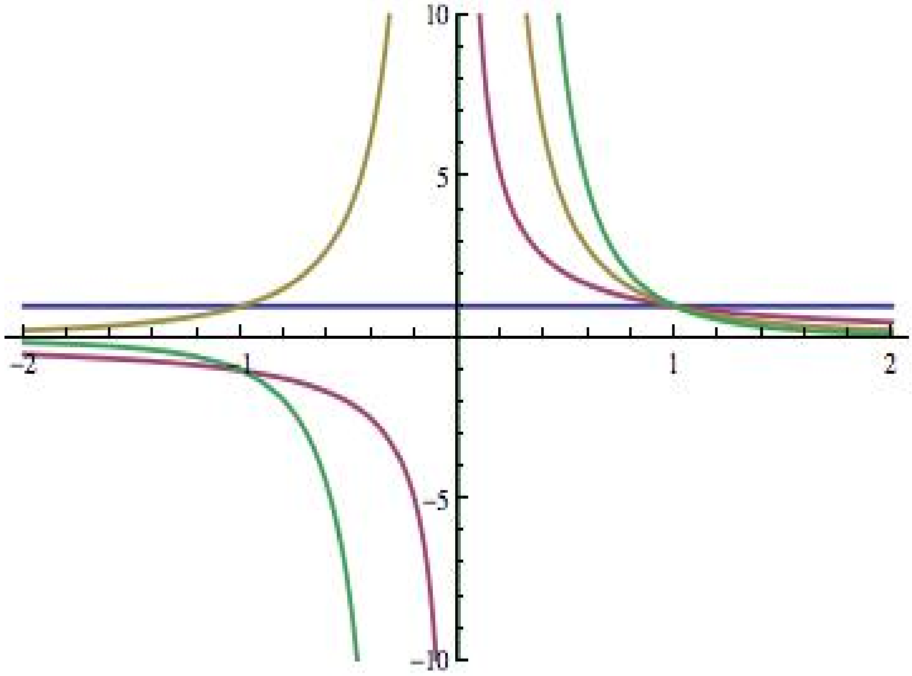

Figure 2.4: $f(x) = 1/x^0$, $f(x) = 1/x^1$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = 1/x^3$

Ensuite les puissances de type $1/n$. Soit $x \geq 0$, posons $y = x^{1/n}$. On a

$$y^n = \left(x^{1/n}\right)^n = x^{n/n} = x^1 = x\,.$$

Ainsi y vérifie $y^n = x$, c'est ce qu'on appelle la *racine n-ième* de x. Le cas $n = 2$ est la racine carrée usuelle.

Les fonctions racines n-ièmes : $f(x) = x^{1/n}$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

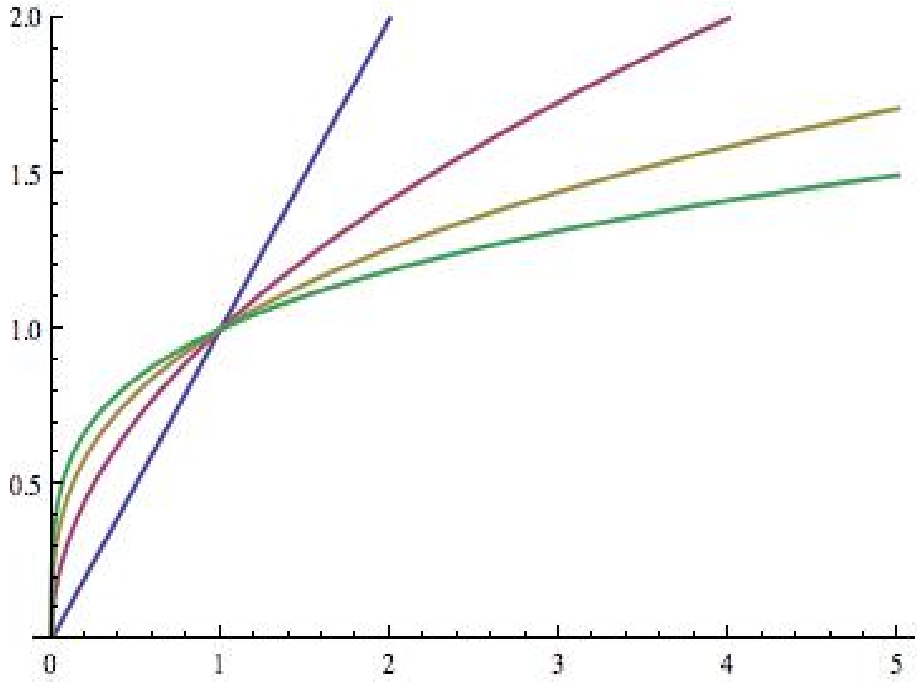

Figure 2.5: $f(x) = x^{1/1}$, $f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{1/3}$, $f(x) = x^{1/4}$

Notez que quand n est impair, on peut définir $x^{1/n}$ sur tout $\mathbb{R}$ en posant

$$x^{1/n} = -(-x)^{1/n}\,.$$

C'est encore l'unique réel y tel que $y^n = x$. Lorsque n est pair il n'y a pas de telle extension.

La combinaison de toutes ces fonctions puissances permet de définir les *fonction puissances rationnelles*. En effet, soit $q \in \mathbb{Q}$, de la forme $q = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x > 0$ on pose, en respectant les règles annoncées :

$$x^q = x^{a/b} = (x^{1/b})^a = (x^a)^{1/b}\,.$$

Les fonctions puissances rationnelles sont donc définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

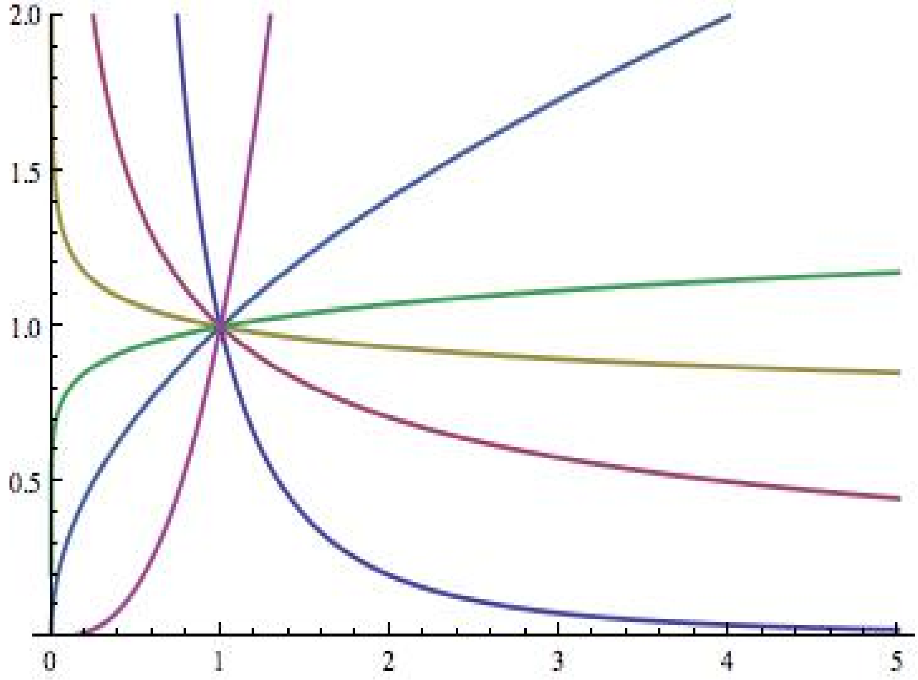

Figure 2.6: $f(x) = x^{-7/3}$, $f(x) = x^{-1/2}$, $f(x) = x^{-1/10}$, $f(x) = x^{1/10}$, $f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{8/3}$

Je vous donne en exercice de démontrer les relations suivantes, pour tout $x > 0$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}
x^0 &= 1 \\
1^\alpha &= 1 \\
x^{\alpha+\beta} &= x^\alpha\, x^\beta \\
x^{\alpha\beta} &= (x^\alpha)^\beta \\
(e^x)^\alpha &= e^{\alpha x} \\
\ln(x^\alpha) &= \alpha \ln(x) \\
x^\alpha &= e^{\alpha \ln(x)}\,.
\end{aligned}$$

C'est cette dernière formule que l'on retient pour définir les puissances quelconques. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}\,.$$

Elles vérifient les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} x^0 &= x\,, \\ 1^\alpha &= 1\,, \\ x^a\, y^a &= (xy)^a\,, \\ x^a\, x^\beta &= x^{\alpha+\beta}\,, \\ (x^a)^\beta &= x^{\alpha\beta}\,. \end{aligned}$$

Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et

$$(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}\,.$$

2.1.4 Comparaisons de fonctions

Théorème 2.1.5 *Quelques soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$ on a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} = +\infty\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0+} x^\beta\ |\ln(x)|^\alpha = 0\,.$$

Démonstration Nous allons commencer par démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\,.$$

Soit $x > 0$ et $p = E[x]$, on a

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{e^p}{p+1} \geq \frac{2^p}{p+1}\,.$$

Mais on peut facilement démontrer par récurrence que pour $n \geq 5$ on a

$$\frac{2^n}{n+1} \geq n\,.$$

En effet

$$\frac{2^{n+1}}{n+2} = \frac{2^n}{n+1}\,\frac{2(n+1)}{n+2} \geq \frac{2n(n+1)}{n+2}$$

qui est plus grand que $n+1$ dès que $n \geq 2$. Cela démontre la convergence annoncée.

En particulier, en élevant à la puissance β, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\beta} = +\infty\,,$$

pour tout $\beta > 0$. Maintenant, pour tout $\beta, \gamma > 0$ on a

$$\frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} = \frac{e^{\beta\,\frac{\gamma x}{\beta}}}{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^\beta \left(\frac{\gamma x}{\beta}\right)^\beta}\,.$$

Quand x tend vers $+\infty$ alors $y = \gamma x/\beta$ tend vers $+\infty$ aussi et donc

$$\frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} = C\,\frac{e^{\beta y}}{y^\beta}$$

tend vers $+\infty$. Nous avons ainsi démontré que $\lim_{x\to+\infty} x^\beta/e^{\gamma x} = 0$.

Regardons maintenant

$$\frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta}\,.$$

Si on pose $y = \ln(x)$ la quantité ci-dessus s'écrit

$$\frac{y^\alpha}{e^{\beta y}}\,.$$

Quand x tend vers $+\infty$ alors y aussi et donc $y^\alpha/e^{\beta y}$ tend vers 0. Ce qui prouve la relation voulue en $+\infty$.

Enfin, regardons au voisinage de 0, la limite de $x^\beta\,|\ln(x)|^\alpha$. Posons $y = 1/x$, la quantité ci-dessus vaut $|\ln y|^\alpha/y^\beta$. Quand x tend vers 0 alors y tend vers $+\infty$ et la quantité ci-dessus tend vers 0. □

2.2 Fonctions circulaires réciproques

Le but de cette section est de définir et d'étudier toute une famille de fonctions très utiles, les fonctions réciproques des fonctions circulaires usuelles cos, sin, tan. Comme aucune d'entre elles n'est une bijection il faut faire attention aux domaines de définition.

2.2.1 Arccos

La fonction cos est continue, strictement décroissante de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

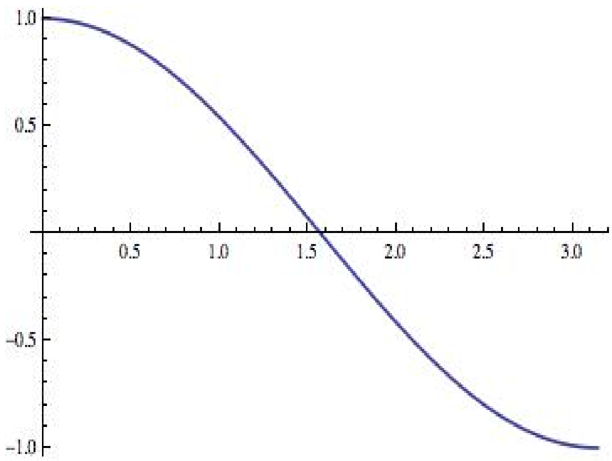

Figure 2.7: $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, \pi]$

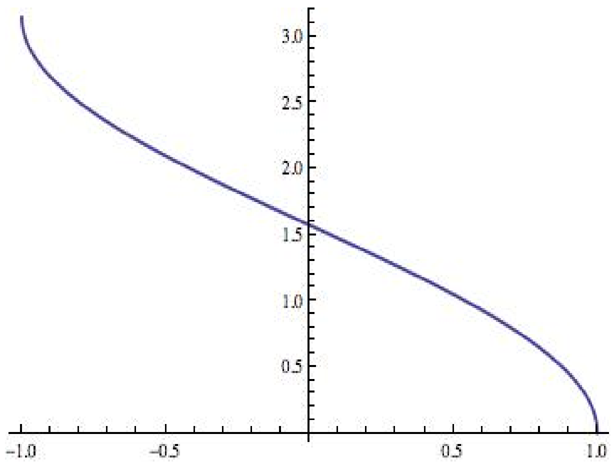

Figure 2.8: $f(x) = \arccos(x)$

C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arccos la fonction réciproque de cos sur ces ensembles. Ainsi arccos est définie de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

Comme cos est dérivable, de dérivée $-\sin$ qui ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, alors arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} .$$

Mais sur cet intervalle $[0, \pi]$ on a

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos(x)^2}$$

donc

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos(\arccos(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

sur $]-1,1[$. Notez qu'en -1 et 1 les pentes sont infinies.

2.2.2 Arcsin

ô La fonction sin est continue, strictement croissante de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1,1]$.

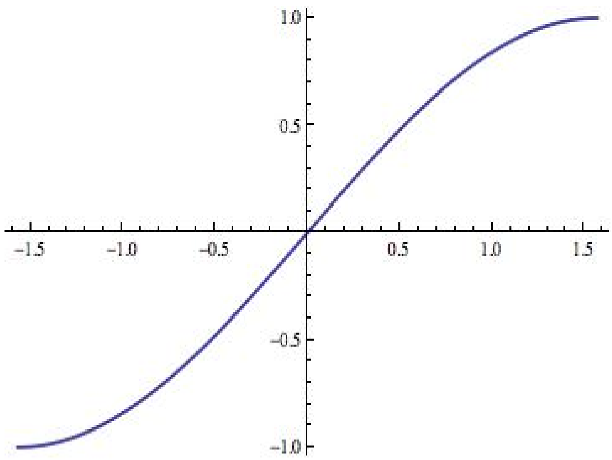

Figure 2.9: $f(x) = \sin(x)$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$

C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arcsin la fonction réciproque de sin sur ces ensembles. Ainsi arcsin est définie de $[-1,1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

Comme sin est dérivable, de dérivée cos qui ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, alors arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Mais sur cet intervalle $[0, \pi]$ on a

$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin(x)^2}$$

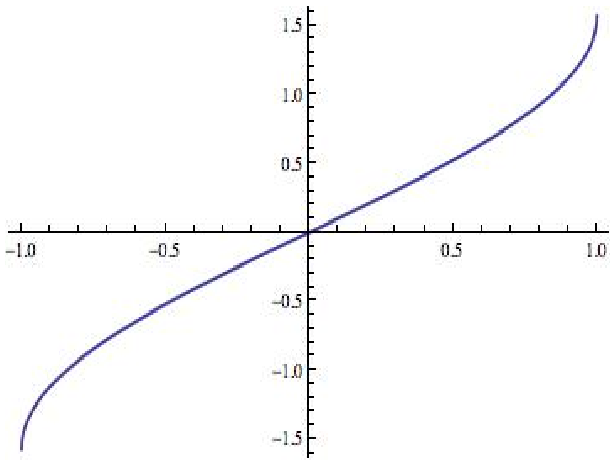

Figure 2.10: $f(x) = \arcsin(x)$

donc

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.}$$

sur $]-1,1[$. Notez qu'en -1 et 1 les pentes sont infinies.

2.2.3 Arctan

La fonction tan est continue, strictement croissante de $]-\pi/2,\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$.

C'est donc une bijection pour ces ensembles. On appelle arctan la fonction réciproque de tan sur ces ensembles. Ainsi arctan est définie de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2,\pi/2[$.

C'est une fonction continue, par les théorèmes généraux. Voici son graphe.

Comme tan est dérivable, de dérivée $1+\tan^2$ qui ne s'annule pas sur $]-\pi/2,\pi/2[$, alors arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Donc à retenir

$$\boxed{(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.}$$

sur $\mathbb{R}$.

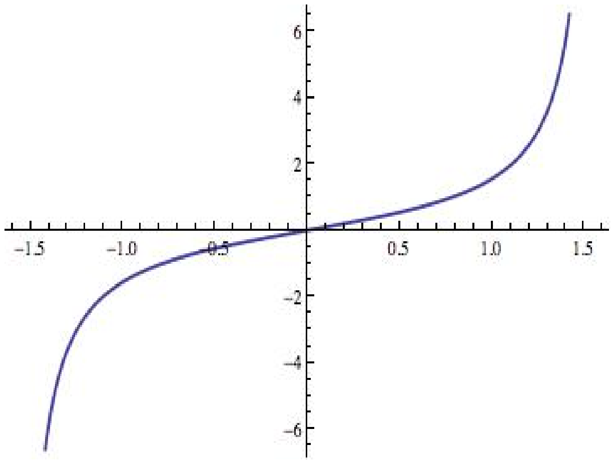

Figure 2.11: $f(x) = \tan(x)$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$

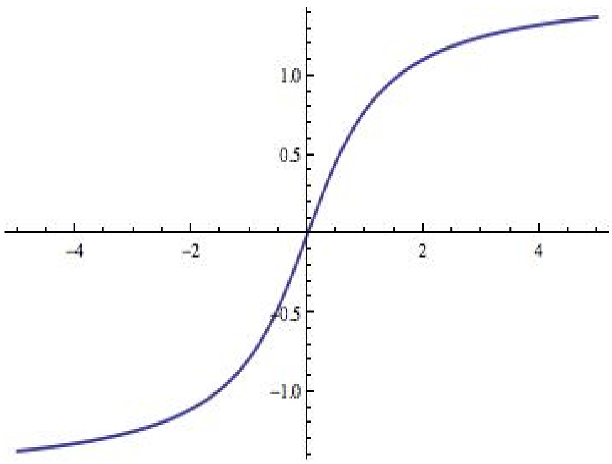

Figure 2.12: $f(x) = \arctan(x)$

2.2.4 Formules

Il faut un peu faire attention quand on utilise $\arccos(\cos(x))$ et $\cos(\arccos(x))$. En effet, $\cos(\arccos(x))$ est bien défini pour tout $x \in [-1, 1]$ et on a clairement

$$\boxed{\cos(\arccos(x)) = x}$$

pour tout $x \in [-1, 1]$.

Par contre, comme arccos renvoie toujours sur l'intervalle $[0, \pi]$, on a en général

$$\arccos(\cos(x)) \neq x\,.$$

En fait on a

$$\boxed{\arccos(\cos(x)) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [0, \pi]\,.}$$

De la même façon, $\sin(\arcsin(x))$ est bien défini pour tout $x \in [-1, 1]$ et on a clairement

$$\boxed{\sin(\arcsin(x)) = x}$$

pour tout $x \in [-1, 1]$.

Par contre, comme arcsin renvoie toujours sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, on a en général

$$\arcsin(\sin(x)) \neq x\,.$$

En fait on a

$$\boxed{\arcsin(\sin(x)) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]\,.}$$

Notez le lien suivant entre arcsin et arccos : pour tout $x \in [-1, 1]$

$$\boxed{\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}\,.}$$

En effet, la fonction arcsin + arccos est de dérivée nulle, donc elle est constante et on calcule $\arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \pi/2 = \pi/2$.

Enfin, de la même façon que précédemment on obtient facilement

$$\boxed{\tan(\arctan(x)) = x}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\boxed{\arctan(\tan(x)) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[\,.}$$

2.3 Fonctions hyperboliques

2.3.1 Définitions

On définit sur $\mathbb{R}$ les 3 fonctions suivantes. Le *cosinus hyperbolique*

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,$$

le *sinus hyperbolique*

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,$$

et la *tangente hyperbolique*

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

Ce sont toutes clairement des fonctions continues. On calcule assez facilement les limites suivantes

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) &= -1 \\
\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) &= 1\,.
\end{aligned}$$

Elles sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ et on trouve facilement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}'(x) &= \mathrm{sh}(x) \\
\mathrm{sh}'(x) &= \mathrm{ch}(x) \\
\mathrm{th}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2\,.
\end{aligned}$$

Voici les graphes de ces fonctions.

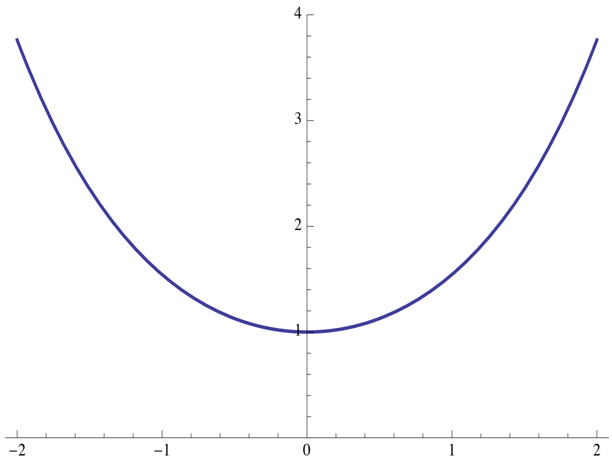

Figure 2.13: $f(x) = \mathrm{ch}(x)$

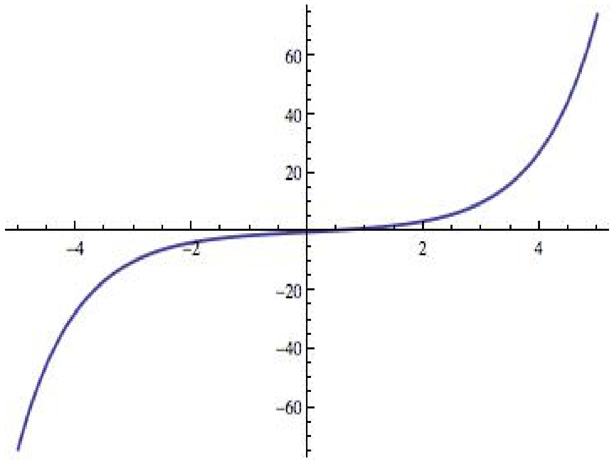

Figure 2.14: $f(x) = \mathrm{sh}(x)$

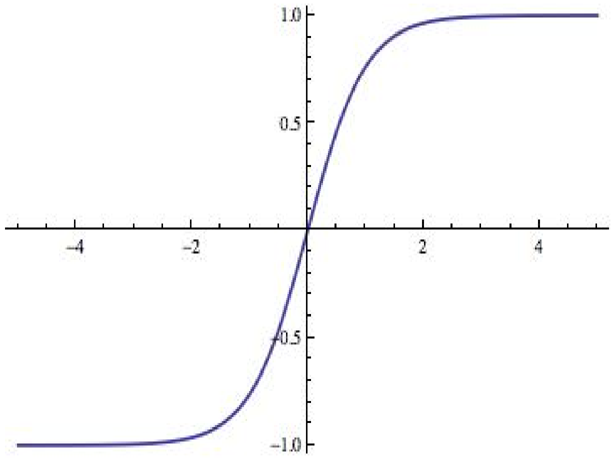

Figure 2.15: $f(x) = \mathrm{th}(x)$

2.3.2 Formules

Il y a beaucoup de formules similaires à celles des fonctions trigonométriques usuelles, avec des petite différences, souvent de signe, auxquelles il faut faire attention. Tout d'abord

$$\boxed{\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)\,, \quad \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)\,.}$$

La formule habituelle devient

$$\boxed{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1\,.}$$

La formule de de Moivre devient triviale

$$(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)\,.$$

Les formules d'addition

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x+y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) \\
\mathrm{ch}(x-y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) \\
\mathrm{sh}(x+y) &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) \\
\mathrm{sh}(x-y) &= -\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)\,.
\end{aligned}
$$