Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016

Math I Algèbre - CPGEI

Feuille d'exercices d'algèbre n° 3

NOMBRES COMPLEXES (PREMIÈRE PARTIE : SANS LA FORME TRIGONOMÉTRIQUE)

---

1 Calculs, partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module

Exercice 1.

1. Calculer $i^n,\ n \in \mathbb{Z}$.
2. Calculer $(1+i)^8$.

Exercice 2.

1. Écrire le conjugué de $z = \dfrac{4-5i}{3+i}$, puis préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2. Soit z un complexe. Quel est le conjugué de $w = \dfrac{2z^2 - i}{5z+1}$?

Exercice 3.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, exprimer $1/z$ sous forme algébrique.
2. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et tout $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, déterminer l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\left\{\begin{array}{ccccc} ax & - & by & = & c \\ bx & + & ay & = & d \end{array}\right. .$$

Exercice 4. On note $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Soit P une fonction polynomiale à coefficients réels et z un complexe. Montrer que si $P(z) = 0$, alors aussi $P(\overline{z}) = 0$
2. Calculer $j\overline{j}$ et $j + \overline{j}$.
3. En déduire $j(-1-j)$, puis constater que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Quelle est l'autre solution ?
4. Résoudre l'équation $z^3 = 1$.
5. Justifier le plus économiquement possible que $\overline{j} = \dfrac{1}{j} = j^2$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

Exercice 6. Résoudre $z^2 = \bar{z}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 8. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

Exercice 9. Soit u, v et w trois nombres complexes tels que $|u| = |v| = |w| = 1$. Établir la relation :

$$|uv + vw + wu| = |u + v + w|.$$

Exercice 10.
Soit u et v deux nombres complexes distincts tous deux de module 1. Montrer que pour tout complexe z, le nombre complexe : $\left(\dfrac{z + uv\overline{z} - (u+v)}{u-v}\right)^2$ est un nombre réel négatif ou nul.

Exercice 11.
La notation j désigne le complexe $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ étudié à l'exercice 4.
On note F l'application de $\mathbb{C}^3$ vers C^3 définie pour tout (u, v, w) de $\mathbb{C}^3$ par :

$$F(u, v, w) = (u + v + w, u + jv + j^2 w, u + j^2 v + jw).$$

1. Calculer $F \circ F$. En déduire que F est bijective et que $F^{-1} = \dfrac{1}{9}(F \circ F \circ F)$.
2. Soit $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$. Montrer l'équivalence suivante :

$$F(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \iff u \in \mathbb{R},\ v + w \in \mathbb{R} \text{ et } jv + j^2 w \in \mathbb{R}.$$

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante plus simple que celle trouvée à la question précédente pour que $F(u, v, w)$ soit dans $\mathbb{R}^3$.

2 Autour des racines carrées

Exercice 12. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $\Delta_1 = 3 + 4i,\ \Delta_2 = 8 - 6i,\ \Delta_3 = -25,\ \Delta_4 = 49,\ \Delta_5 = 50i.$

Exercice 13. Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $z^2 + 2z + 10 = 0$ **2**. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ **3**. $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0.$

Exercice 14. Résoudre l'équation suivante :

$$z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0.$$

Exercice 15. On considère l'équation en $z \in \mathbb{C}$ suivante : $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0.$

1. Déterminer une racine réelle z_0 de cette équation.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, factoriser $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$ par $(z - z_0)$.
3. Résoudre l'équation.

Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2015-2016

Math I - CPGEI

Feuille d'exercices d'algèbre n° 4

NOMBRES COMPLEXES (DEUXIÈME PARTIE : TRIGONOMÉTRIE)

Exercice 1.

1. Calculer le module et un argument de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
2. Écrire sous forme trigonométrique $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Racines de l'unité

Exercice 2. Résoudre en $z \in \mathbf{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = -8i$; **2.** $z^5 - z = 0$; **3.** $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$;
4. $z^2\bar{z}^7 = 1$; **5.** $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.
2. Calculer la somme des racines n-ièmes de l'unité.
3. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 4. Soit z un nombre complexe. Prouver les identités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{18}\left(z - e^{2ik\pi/19}\right)^2 = 19z^2;$$

$$\sum_{k=0}^{18}\left|z - e^{2ik\pi/19}\right|^2 = 19(1+|z|^2).$$

Valeurs trigonométriques d'angles remarquables

Exercice 5. On note $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$ puis l'on définit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2. En déduire des expressions de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 6.

1. Résoudre algébriquement en $z \in \mathbf{C}$ l'équation $z^2 = (1+i)$.
2. En déduire des expressions de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 7. On note $\omega = e^{2i\pi/5}$.

1. Quelle relation simple lie les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\omega + \frac{1}{\omega}$?
2. Justifier l'identité :

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) - 1 = 0.$$

3. Calculer $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

D'autres applications à la trigonométrie

Exercice 8. *Réduction de* $a \cos x + b \sin x$.

1. Soit a et b deux réels. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta).$$

2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 9. Linéariser les expressions suivantes :

1. $\cos(2\varphi)$ **2**. $\sin(3\varphi)$ **3**. $\cos(5\varphi) \cdot \sin(3\varphi)$.

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)\ .$$

Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2015-2016

Math I - CPGEI

Feuille d'exercices d'algèbre numéro 5

NOMBRES COMPLEXES (TROISIÈME PARTIE : GÉOMÉTRIE)

Polygones

Exercice 1

Soit u et v deux nombres complexes. Établir l'identité suivante, dite "du parallélogramme" :

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Pourquoi ce nom ?

Exercice 2

Soit a, b, c et d quatre nombres complexes distincts qui vérifient les deux relations :

$$a + c = b + d \qquad \text{et} \qquad a + ib = c + id.$$

Que peut-on dire du quadrilatère formé des quatre points ayant ces nombres complexes pour affixes ?

Exercice 3

Soit a, b et c trois nombres complexes qui sont affixes de trois points qui forment dans le plan un triangle équilatéral. Montrer que :

$$\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^3 = 1.$$

Exercice 4

Sur chacun des côtés d'un quadrilatère convexe, on construit un carré, à l'extérieur du quadrilatère initial. On relie par deux segments les centres des carrés construits sur des côtés opposés du quadrilatère initial. Montrer, en utilisant des calculs dans le plan complexe, que les deux segments ainsi construits sont perpendiculaires et ont la même longueur.

Exercice 5

Soit θ un réel, avec $0 \leq \theta \leq \pi$.

1) Déterminer l'ensemble des solutions complexes de l'équation : $z^6 - 2z^3\cos\theta + 1 = 0$.

2) Pour quelles valeurs de θ ces solutions sont-elles les sommets d'un hexagone régulier ?

Transformations affines

Exercice 6

On rappelle l'identification canonique de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}$ par l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ z & \mapsto & (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \end{array}.$$

1. Identifier les transformations complexes suivantes :

$$f_1(z) = z + 3 - 2i;\ f_2(z) = e^{i2\pi/7}z;\ f_3(z) = e^{i2\pi/3}z - 1;\ f_4(z) = 3z - 5 + i;\ f_5(z) = (2+2i)z + 3i.$$

2. Donner les applications de $\mathbb{C}$ qui representent des transformations du plan suivantes :
   (a) La translation du vecteur d'affixe $-2+i$;
   (b) La symétrie centrale du centre i ;
   (c) La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1 ;
   (d) L'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe $1+2i.$;
   (e) La similitude de rapport 2 et d'angle $\pi/3$ et de centre $1+i$.
3. Décrire géométriquement et déterminer la nature des similitudes correspondant aux applications suivantes.
$$\varphi_1 : \ z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 3; \qquad \varphi_2 : \ z \mapsto i\,\bar{z}.$$
4. Montrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
5. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

Exercice 7

Soit s une similitude directe telle que $s(2-i) = 1$ et $s(-1+2i) = 1+6i$. Déterminer l'homothetie h et la rotation r telles que $s = h \circ r$. Donner l'affixe du point fixe de s.

Exercice 8

Rappeler ou découvrir l'expression en terme de nombres complexes des transformations suivantes :

1) Pour v un complexe, la translation de vecteur v.

2) Pour a complexe et λ réel non nul, l'homothétie de centre a et de rapport λ.

3) Pour a complexe et θ réel, la rotation de centre a et d'angle θ.

4) Pour a complexe et θ réel, la symétrie par rapport à un axe passant par a et faisant un angle θ avec l'axe réel.

Exercice 9

On dit qu'un ensemble d'applications est stable par composition lorsque pour toutes f et g lui appartenant, $f \circ g$ lui appartient aussi. Les ensembles suivants de transformations planes sont-ils ou non stables par composition ?

1) L'ensemble des translations ?

2) L'ensemble des homothéties ?

3) L'ensemble des homothéties de rapport strictement supérieur à 1 ?

4) L'ensemble des homothéties et des translations ?

5) L'ensemble des symétries par rapport à des droites ?

6) L'ensemble des rotations ?

7) L'ensemble des symétries et des rotations ?

8) L'ensemble des symétries, des rotations et des translations ?

9) L'ensemble des similitudes directes ?

10) L'ensemble des similitudes directes et des translations ?

Exercice 10

On se place dans le plan complexe. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. Soit r la transformation du plan, qui, à un point M d'affixe z, associe le point M_0 d'affixe $z_0 = jz + 3$.

1. Déterminer les points invariants (fixes) de r, et la nature de la transformation r.
2. Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^2(M)$, où on note $r^2 = r \circ r$, et déterminer la nature de la transformation r^2.
3. Soit M un point d'affixe z. Calculer l'affixe du point $r^3(M)$, où on note $r^2 = r \circ r \circ r$. Que peut-on dire de la transformation r^{-1} du plan ?

Exercice 11

On indéntifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. On considère la transformation $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie, pour $z \in \mathbb{C}$, par

$$f(z) = 2\overline{z} + 3 - 4i.$$

1. Calculer le(s) points invariant(s) de f.
2. Donner une équation cartésienne du cercle C de centre $1 - i$ et de rayon 2.
3. Calculer $f(1 - i)$. En déduire une équation cartésienne de l'image de C par transformation f.
4. Quelle est la nature de l'application f ?

Exercice 12

Soient $f : z \mapsto -z - 2i$ et $g : z \mapsto 2z - 1 - i$ deux transformaions du plan complexe.

1. Déterminer les points fixes de f et g.
2. Montrer que f et g sont deux homothéties dont on donnera le centre et le rapport.
3. Montrer que $f \circ g$ est une homothétie dont on donnera le centre et le rapport.
4. Montrer que ces trois centres sont alignés.

Quelques ensembles de points

Exercice 13

Pour chacune des relations suivantes, déterminer l'ensemble des nombres complexes z qui la vérifient :

1) $|(1-i)z - 3i| = 3$ 2) $|1 - z| \leq 1/2$ 3) $\mathcal{R}e(1 - z) \leq 1/2$ 4) $\mathcal{R}e(iz) \leq 1/2$
5) $|1 - 1/z|^2 = 2$ 6) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$ 7) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 2$ 8) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| < 2.$

Exercice 14

Montrer que, dans le plan complexe, l'ensemble $\left\{\dfrac{1}{1+it}, t \in \mathbb{R}\right\}$ est contenu dans le cercle de centre $1/2$ et de rayon $1/2$. Est-ce le cercle tout entier ?