Faculté des sciences et Technologies
Université Claude Bernard (Lyon 1)

16 Juin 2010

CCF de MATH II-Analyse

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite.

I. (3 points)

Calculer, sur un intervalle où cela a un sens :

$$\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}dx$$

Allez à : Correction I

II. (7 points)

Dans tout l'exercice a désigne un réel strictement positif. Pour certains réels, on note :

$$f_a(x)=\sqrt{\frac{x+a}{x+1}} \quad \text{et} \quad g_a(x)=\arctan\big(f_a(x)\big)$$

1. Justifié que f_a et g_a sont des fonctions définies sur des ensembles contenant $\mathbb{R}^+$.
2. En utilisant la formule de Taylor-Young, écrire un développement limité à l'ordre 2 de arctan au voisinage de 1.
3. Pour $x>0$, on note $h=\frac{1}{x}$.
   a) Ecrire un développement limité à l'ordre 2 de $f_a\left(\frac{1}{h}\right)$ exprimé en fonction de h, quand h tend vers 0.
   b) En faire autant pour g_a.
   c) Discuter en fonction de la valeur du paramètre a de la convergence ou de la divergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\left(g_a(x)-\frac{\pi}{4}\right)dx$$

Allez à : Correction II

III. (12 points)

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}dt\,, \qquad K_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}dt$$

1. Montrer que, J_n et K_n sont des intégrales convergentes.
2. On rappelle que :

$$\sin(A)-\sin(B)=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

   Montrer que pour tout $n\geq 1$:

$$J_n-J_{n-1}=0$$

   En déduire la valeur de J_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3. Soit f définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f(0) = 0$ et

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \quad \text{pour } t \neq 0$$

Calculer $f'(t)$ pour $t \neq 0$, et en déduire que f est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$;

4. Calculer $f'(0)$ et conclure que f est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. A l'aide d'une intégration par partie montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} (J_n - K_n) = 0$$

6. Vérifier que :

$$K_n = \int_0^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

7. A l'aide d'une intégration par partie montrer que

$$I_2(X) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Admet une limite quand $X \to +\infty$.

8. Montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Est une intégrale convergente

9. Montrer que

$$I = \lim_{n\to+\infty} K_n$$

Et en déduire la valeur de I.

Allez à : Correction III

CORRECTION

Correction I.

Il existe a, b et c réels tels que :

$$\frac{x^2 + 6x - 1}{(x-3)^2(x-1)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2} + \frac{c}{x-1}$$

On multiplie par $(x-3)^2$, puis $x = 3$

$$b = \left[\frac{x^2 + 6x - 1}{x - 1}\right]_{x=3} = 13$$

On multiplie par $x - 1$, puis $x = 1$

$$c = \left[\frac{x^2 + 6x - 1}{(x-3)^2}\right]_{x=1} = \frac{3}{2}$$

On multiplie par x, puis $x \to +\infty$

$$1 = a + c \Leftrightarrow a = 1 - c = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-3} + \frac{13}{(x-3)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} \right) dx$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x-3| + 13\int (x-3)^{-2}dx + \frac{3}{2}\ln|x-1| + K$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x-3| - \frac{13}{x-3} + \frac{3}{2}\ln|x-1| + K$$

Allez à : I

Correction II.

1. Si $x \geq 0$ alors $x+a > 0$ et $x+1 > 0$ cela implique que $\frac{x+a}{x+1} > 0$, par conséquent, f_a est définie pour tout $x > 0$, donc sur un ensemble contenant $\mathbb{R}^+$. $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc g_a est définie sur le même ensemble que f_a.
2. $f = \arctan$ est $C^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$, donc cette fonction admet un développement limité à n'importe quel ordre.

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) + o\left((x-1)^2\right)$$
$$f(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{2}$$
$$\arctan(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

3.

a) Première méthode (Pas terrible)

$$f_a\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{\frac{1}{h}+a}{\frac{1}{h}+1}} = \sqrt{\frac{1+ah}{1+h}}$$
$$\frac{1+ah}{1+h} = (1+ah)\left(1-h+h^2+o(h^2)\right) = 1+(a-1)h+(1-a)h^2+o(h^2)$$
$$f_a\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{1+ah}{1+h}} = \left(1+(a-1)h+(1-a)h^2+o(h^2)\right)^{\frac{1}{2}} = (1+X)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+o(X^2)$$

Avec

$$X = (a-1)h+(1-a)h^2+o(h^2)$$
$$X^2 = \left((a-1)h+(1-a)h^2+o(h^2)\right)\left((a-1)h+(1-a)h^2+o(h^2)\right) = (a-1)^2h^2+o(h^2)$$
$$o(X^2) = o(h^2)$$

$$\begin{aligned} f_a\left(\frac{1}{h}\right) &= 1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+o(X^2) \\ &= 1+\frac{1}{2}\left((a-1)h+(1-a)h^2+o(h^2)\right)-\frac{1}{8}\left((a-1)^2h^2+o(h^2)\right)+o(h^2) \\ &= 1+\frac{1}{2}(a-1)h+\left(\frac{1}{2}(1-a)-\frac{1}{8}(a-1)^2\right)h^2+o(h^2) \\ &= 1+\frac{1}{2}(a-1)h+\frac{1}{8}(1-a)\left(4-(1-a)\right)h^2+o(h^2) \\ &= 1+\frac{1}{2}(a-1)h+\frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2+o(h^2) \end{aligned}$$

Deuxième méthode (meilleure)

$$\sqrt{\frac{1+ah}{1+h}}=(1+ah)^{\frac{1}{2}}(1+h)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}ah+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(ah)^2}{2!}+o(h^2)\right)\left(1-\frac{1}{2}h+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{h^2}{2!}+o(h^2)\right)=$$

$$=\left(1+\frac{a}{2}h-\frac{a^2}{8}h^2+o(h^2)\right)\left(1-\frac{1}{2}h+\frac{3}{8}h^2+o(h^2)\right)$$

$$=1+\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\right)h+\left(\frac{3}{8}-\frac{a}{4}-\frac{a^2}{8}\right)h^2+o(h^2)$$

$$=1+\frac{a-1}{2}h-\frac{1}{8}(a^2+2a-3)h^2+o(h^2)$$

Comme $a=1$ et $a=-3$ sont les deux racines de a^2+2a-3, on retrouve bien que

$$\sqrt{\frac{1+ah}{1+h}}=1+\frac{1}{2}(a-1)h-\frac{1}{8}(a-1)(3+a)h^2+o(h^2)$$

b)

$$g_a\left(\frac{1}{h}\right)=\arctan\left(f_a\left(\frac{1}{h}\right)\right)=\arctan\left(1+\frac{1}{2}(a-1)h+\frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2+o(h^2)\right)=\arctan(X)$$

Avec $X=1+\frac{1}{2}(a-1)h+\frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2+o(h^2)$

On utilise alors la première question avec $X\to 1$.

$$X-1=\frac{1}{2}(a-1)h+\frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2+o(h^2)$$

$$(X-1)^2=\left(\frac{1}{2}(a-1)h+\frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2+o(h^2)\right)^2=\frac{1}{4}(a-1)^2h^2+o(h^2)$$

$$o((X-1)^2)=o(h^2)$$

$$g_a\left(\frac{1}{h}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(X-1)-\frac{1}{4}(X-1)^2+o((X-1)^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a-1)h+\frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2+o(h^2)\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}(a-1)^2h^2+o(h^2)\right)$$

$$+o(h^2)=\frac{\pi}{4}+\frac{a-1}{4}h+\left(-\frac{1}{16}(a-1)(a+3)-\frac{1}{16}(a-1)^2\right)h^2+o(h^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{a-1}{4}h-\frac{a-1}{16}\big((a+3)+(a-1)\big)h^2+o(h^2)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{a-1}{4}h-\frac{(a-1)(a+1)}{8}h^2+o(h^2)$$

c)

$$g_a(x)-\frac{\pi}{4}=\frac{a-1}{4}\frac{1}{x}-\frac{(a-1)(a+1)}{8}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Si $a\neq 1$ alors $g_a(x)\sim_0 \frac{a-1}{4}\frac{1}{x}$ et l'intégrale diverge.

Si $a=1$ alors $g_a(x)=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et l'intégrale converge.

Allez à : II

Correction III.

1.

$$\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)} \sim_{t=0} \frac{(2n+1)t}{t} = 2n+1 \ \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)} = 2n+1$$

$t \to \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0, donc J_n est une intégrale convergente en 0.

$$\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t} \sim_{t=0} \frac{(2n+1)t}{t} = 2n+1 \ \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t} = 2n+1$$

$t \to \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0, donc K_n est une intégrale convergente en 0.

2.

$$\begin{aligned}\sin\big((2n+1)t\big) - \sin\big((2n-1)t\big) &= 2\cos\left(\frac{(2n+1)t + (2n-1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(2n+1)t-(2n-1)t}{2}\right)\\ &= 2\cos(2nt)\sin(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_n - J_{n-1} = J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n-1)t\big)}{\sin(t)}dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)-\sin\big((2n-1)t\big)}{\sin(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(2nt)\sin(t)}{\sin(t)}dt\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2nt)\,dt = 2\left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\sin(n\pi)}{2n} - \frac{\sin(0)}{2n}\right) = 0\end{aligned}$$

Par suite

$$J_n = J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

3.

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{-\sin^2(t) + t^2\cos(t)}{t^2\sin^2(t)}$$

Pour $t \neq 0$ $f'(t)$ est le produit et le quotient de fonction définie et continue en 0 donc f est C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} = \frac{(\sin(t) - t)}{t\sin(t)} = \frac{t + o(t^2) - t}{t\,\big(t+o(t)\big)} = \frac{o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(1)}{1+o(t)} \to 0 = f(0)$$

f admet une limite nulle en 0, donc f est continue en 0.

$$\begin{aligned}-\sin^2(t) + t^2\cos(t) &= -\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)^2 + t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\\ &= -t^2\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)^2 + t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\\ &= -t^2\left(1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)\right) + t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)t^4 + o(t^4)\\ &= -\frac{1}{6}t^4 + o(t^4)\end{aligned}$$

$$f'(t) \sim \frac{-\frac{1}{6}t^4}{t^4} = -\frac{1}{6}$$
$$\lim_{x\to 0} f'(t) = -\frac{1}{6}$$
Et f est continue en 0 et $f'(t)$ admet une limite en 0, donc f est de classe C^1 en 0, et pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, f est C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

5.

$$J_n - K_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\big((2n+1)t\big)\,dt$$

$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin\big((2n+1)t\big)\,dt$	
$u'(t) = -\sin\big((2n+1)t\big)$	$u(t) = \frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}$
$v(t) = f(t)$	$v'(t) = f'(t)$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin\big((2n+1)t\big)\,dt = \left[f(t)\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} -$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\left(\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\right)dt$

$$\begin{aligned}
J_n - K_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin\big((2n+1)t\big)\,dt \\
&= \left[f(t)\frac{\cos\big((2n+1)t\big)}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos\big((2n+1)t\big)\,dt \\
&= f\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1} - f(0)\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos\big((2n+1)t\big)\,dt \\
&= -\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos\big((2n+1)t\big)\,dt
\end{aligned}$$

Car $f(0) = 0$ et $\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\begin{aligned}
|J_n - K_n| &\le \left|\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos\big((2n+1)t\big)\,dt\right| \le \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|f'(t)\cos\big((2n+1)t\big)\right|dt \\
&\le \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)|dt
\end{aligned}$$

Comme f' est continue (f est C^1), il existe M tel que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f'(t)| \le M$

$$|J_n - K_n| \le \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)|dt \le \frac{M}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{M}{2n+1} \times \frac{\pi}{2} \to 0$$

Lorsque $n \to +\infty$.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}(J_n - K_n) = 0$$

6.

$$x = (2n+1)t \Leftrightarrow t = \frac{x}{2n+1} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2n+1}$$
$$t = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$K_n=\int_0^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\sin(x)}{x}}{2n+1}\times\frac{dx}{2n+1}=\int_0^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{x}dx$$

7.

$$I_2(X)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\frac{\sin(x)}{x}dx$$

$I_2(X)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\frac{\sin(x)}{x}dx$	
$u'(x)=\sin(x)$	$u(x)=-\cos(x)$
$v(x)=\frac{1}{x}$	$v'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$I_{2,X}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\frac{\sin(x)}{x}dx=\left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{X}-$	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\frac{(-\cos(x))}{(-x^2)}dx$

$$I_2(X)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\frac{\sin(x)}{x}dx=\left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{X}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\frac{\cos(x)}{x^2}dx=-\frac{\cos(X)}{X}+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{X}\frac{\cos(x)}{x^2}dx$$

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{\cos(X)}{X}=0$$

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$$

$x\to\frac{1}{x^2}$ est une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ car $\alpha=2>1$. Donc $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x^2}dx$ converge.

Donc $I_2(X)$ admet une limite quand $X\to+\infty$.

8.

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{x}dx=K_0+\lim_{X\to+\infty}I_2(X)$$

K_0 est une intégrale convergente et $\lim_{X\to+\infty}I_2(X)$ existe et est finie donc I est une intégrale convergente.

9. D’après 2°) $J_n=\frac{\pi}{2}$, d’après 4°)

$$\lim_{n\to+\infty}(J_n-K_n)=0\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}K_n=\frac{\pi}{2}$$

Comme

$$\mathrm{I}=\lim_{\mathrm{X}\to+\infty}\int_0^{X}\frac{\sin(x)}{x}dx$$

Existe d’après 6.

$$\lim_{\mathrm{X}\to+\infty}\int_0^{X}\frac{\sin(x)}{x}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{x}dx=\lim_{n\to+\infty}K_n=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

Allez à : III