Université Claude Bernard Lyon 1 - printemps 2010

Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Math III Algèbre - MAT2002L

PLANCHE DE TRAVAUX APPLIQUÉS III

- SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES - RÉDUCTION DE JORDAN-

1. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

Exercice 1. Calculer la solution des systèmes différentiels suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + y(t) + z(t) + t \\ \frac{dy(t)}{dt} = x(t) + 2y(t) + z(t) + t^2 \\ \frac{dz(t)}{dt} = x(t) + y(t) + 2z(t) + t^3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + y(t) + 3z(t) + \cos(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = -2x(t) + 2y(t) + 2z(t) + \sin(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = -2x(t) + y(t) + 4z(t) + \cos(t) \end{array}\right.$$

avec condition initiale $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. On se ramenera à un système de la forme

$$\frac{d}{dt}X(t) = \mathbf{A}X(t) + V(t)$$

et on définira une fonction pour calculer la solution de la forme

$$X(t) = e^{t\mathbf{A}}X(0) + \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{A}}V(s)ds.$$

Exercice 2. En se ramenant à un système différentiel de la forme

$$\frac{d}{dt}X(t) = \mathbf{A}X(t) + V(t),$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice compagnon à déterminer, calculer les fonctions x de $C^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ solutions de l'équation

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t) - \frac{d}{dt}x(t) - x(t) = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

2. RÉDUCTION DE JORDAN

Étant donné une matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous savons qu'il existe une suite d'inclusions de sous-espaces vectoriels :

$$\{0\} = \text{Ker } \mathbf{A}^0 \subset \text{Ker } \mathbf{A} \subset \text{Ker } \mathbf{A}^2 \subset \ldots \subset \text{Ker } \mathbf{A}^k \subset \ldots \subset \mathbb{K}^n.$$

Les dimensions de ces noyaux itérés forment une suite croissante d'entiers bornée par n.

Exercice 3.

1. Écrire une fonction qui retourne la liste formée des dimensions des noyaux itérés de la matrice $\mathbf{A}$ placée en argument.

2. Écrire une fonction qui retourne une liste formée de bases des noyaux itérés de la matrice $\mathbf{A}$ placée en argument.

3. Tester ces procédures sur une matrice définie aléatoirement.

4. Sachant qu'une matrice définie aléatoirement est presque toujours inversible, construire une matrice permettant de tester efficacement ces procédures. On pourra construire une batterie d'exemples en construisant des matrices diagonales par blocs.

5. Nous avons montré que lorsque $\mathbf{A}$ est nilpotente, les inclusions sont strictes :

$$\{0\} = \text{Ker } \mathbf{A}^0 \subsetneq \text{Ker } \mathbf{A} \subsetneq \text{Ker } \mathbf{A}^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \text{Ker } \mathbf{A}^k \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{K}^n.$$

Tester vos fonctions sur les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Construire des matrices de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ dont la suite des dimension des noyaux itérés est

$$(2,4,6,6,6,6), \quad (2,4,5,5,5,5), \quad (2,3,4,4,4,4), \quad (2,3,4,5,6,6), \quad (2,2,2,2,2,2).$$

7. Construire une matrice dont le polynôme caractéristique et le polynôme minimal sont respectivement :

$$P = (X-5)^3(X-4)^2, \qquad m = (X-5)^2(X-4)^2.$$

8. Construire deux matrices non semblables dont les polynômes caractéristique et minimal sont respectivement :

$$P = (X-5)^4(X-4), \qquad m = (X-5)^2(X-4).$$

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n dont le polynôme caractéristique est

$$P_u = (-1)^n(X-\lambda_1)^{h_1}\ldots(X-\lambda_p)^{h_p}.$$

Nous avons montré que le nombre de blocs de Jordan de taille k pour la valeur propre λ_i dans la réduite de Jordan de u est donné par

$$n_k(\lambda_i) = r_{k-1}(\lambda_i) - 2r_k(\lambda_i) + r_{k+1}(\lambda_i),$$

où $r_k(\lambda_i) = \text{rang}(u - \lambda_i \text{id}_E)^k$.

On considère les deux matrices vues en travaux dirigés :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 2 & 6 \\ -7 & -6 & -6 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

En utilisant la formule ci-dessus, calculer pour chaque valeur propre λ et pour chaque entier k, le nombre de blocs de Jordan de taille k associé à λ dans les réduites de Jordan des matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Comparer vos résultats avec les réduites de Jordan de ces deux matrices.