Fondamentaux des mathématiques II

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{2}(A - I)$, $C = \frac{1}{2}(A + I)$.

1. Calculer BC et CB.
2. Calculer B^2 et C^2. En déduire B^n et C^n pour $n \in \mathbb{N}$
3. A l'aide de la formule de Newton et en remarquant que $A = B+C$, montrer que $A^n = (-1)^{n+1}B+C$.

Corrigé :

1. Les matrices A et I commutent, donc les matrices B et C aussi. On peut donc appliquer une identité remarquable :
$$CB = BC = \frac{1}{2}(A - I)\,\frac{1}{2}(A + I) = \frac{1}{4}(A^2 - I)$$
On reconnait que $A = E_{L_1 \leftrightarrow L_2}$ est la matrice élémentaire de permutation des lignes L_1 et L_2. En particulier, $A^2 = I$ (échanger deux fois de suite les lignes L_1 et L_2 revient à ne rien changer). Et donc,
$$CB = BC = 0.$$
2. En utilisant à nouveau une identité remarquable, on trouve $B^2 = \frac{1}{4}(A - I)^2 = \frac{1}{4}(A^2 - 2A + I)$. Comme $A^2 = I$ on obtient $B^2 = \frac{1}{2}(I - A) = -B$. Par le même raisonnement, $C^2 = \frac{1}{4}(A + I)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + 2A + I) = \frac{1}{2}(I + A) = C$.

   Calculons à présent B^n, C^n pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Pour $n = 0$, $B^0 = C^0 = I$ et pour $n = 1$, $B^1 = B, C^1 = C$. Montrons par récurrence que pour $n \geq 2$, $B^n = (-1)^{n+1}B$ et $C^n = C$. Nous avons déjà initialisé la récurrence : ces identités sont valables pour $n = 2$. Passons à l'hérédité. Supposons les vraies pour un $n \geq 2$ *fixé* et montrons-les au rang suivant. Comme $B^2 = B$ et $B^n = (-1)^{n+1}B$, on trouve
$$B^{n+1} = B^n\,B = (-1)^{n+1}B^2 = (-1)^{n+2}B.$$
De même, $C^{n+1} = C^n\,C = C$, cqfd.
3. On sait que les matrices B et C commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :
$$A^n = (B + C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k}$$
Dans cette somme, comme $BC = 0$, tous les termes sont nuls sauf le premier et le dernier :
$$A^n = \binom{n}{0} B^0 C^n + 0 + \cdots + 0 + \binom{n}{n} B^n C^0 = B^n + C^n = (-1)^{n+1}B + C$$
On aurait pu aussi se dispenser de la formule de Newton et se rappeler que $A^2 = I$: par une récurrence immédiate, toutes les puissances paires de A valent I, toutes les puissances impaires valent A. En calculant $D := (-1)^{n+1}B + C$ pour n pair, on trouve $D = I$ et pour n impair $D = A$. Ce qui donne une autre manière d'arriver au même résultat.