

Feuille d'exercices n° 5

CALCUL DIFFÉRENTIEL

I. Dérivées directionnelles et classe \mathcal{C}^1

Exercice 1. Étudier l'existence de la dérivée de la fonction $f : (x, y) \mapsto xy^2$ suivant le vecteur $v = (1, -2)$ au point $a = (2, 1)$. Déterminer sa valeur si elle existe.

Exercice 2. Soit $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $G(x, y, z) = (x \sin y, y \sin x, z)$. Justifier l'existence et calculer $\text{div}(G)$, $\text{rot}(G)$ et $\text{grad} \circ \text{div}(G)$.

Exercice 3. Justifier que les fonctions de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 , et calculer leur matrices jacobienues en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$) :

$$f : (x, y) \mapsto e^{xy}(x + y), \quad g : (x, y, z) \mapsto xy + yz + zx, \quad h : (x, y) \mapsto (y \sin x, \cos x)$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais n'est de classe \mathcal{C}^1 sur aucun ouvert contenant $(0, 0)$.

Exercice 5. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 et les calculer.
2. Montrer que f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$.

1. Justifier l'existence et donner le développement limité à l'ordre 1 de f au point $(-4, 3)$.
2. Donner une valeur approchée de $f(-4.01, 3.01)$.

Exercice 7. Soit $f : (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x + 5y + x^2(\sqrt{y} + \sqrt{x})$. Déterminer l'ensemble des points où

1. f est continue,
2. f admet des dérivées partielles,
3. f est de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert contenant ce point,
4. f admet des dérivées directionnelles.

II. Fonctions composées

Exercice 8. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par $f(x, y) = x^2 - y^2$ et $g(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z)$.

1. Expliciter $h = f \circ g$.
2. Justifier que les fonctions f , g et h sont de classe \mathcal{C}^1 et écrire leurs matrices jacobiniennes (en un point de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 respectivement).
3. Vérifier l'égalité $J_h(x, y, z) = J_f(g(x, y, z)) \times J_g(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
4. Écrire le développement limité de f , g et h à l'ordre 1 à l'origine.

Exercice 9. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*.$$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pm\pi/2, \pi\}$. Notons $g : (r, \theta) \in]0; +\infty[\times (]0; 2\pi[\setminus \{\pm\pi/2, \pi\}) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Justifier l'existence et donner l'expression de $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial g}{\partial r}$.

Exercice 10. Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée de \mathbb{R}^2 (une application d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^2) de classe \mathcal{C}^1 . Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{xy}$. En sachant que $\gamma(0) = (1, 2)$, et $\gamma'(0) = (3, 4)$. Justifier la dérivabilité de $f \circ \gamma$ et trouver la valeur de $(f \circ \gamma)'(0)$.

Exercice 11. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On pose $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Calculer pour $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ la quantité $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en justifiant son existence.

III. \mathcal{C}^1 -difféomorphismes

Exercice 12. Soit $k \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(x, y) = (x, x + ky)$. Montrer que φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans lui-même.

Exercice 13. (Coordonnées sphériques)

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi :]0; +\infty[\times]-\pi; \pi[\times]0; \pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r, \theta, \varphi) &\longmapsto (r \cos(\theta) \sin(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

Exercice 14. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. On cherche les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 solutions du système (S) :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, & k \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \forall y \in \mathbb{R}, & f(0, y) = \sin y \end{cases}$$

Pour cela, on substitue à cette relation une relation plus simple portant sur une application F , déduite de f par le changement de variable φ de l'exercice 12. Autrement dit, on considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f = F \circ \varphi$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 si et seulement si F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en fonction de celles de F .
3. Vérifier que f est solution de (S) si et seulement si F vérifie (S') :

$$\begin{cases} \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, & \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 0 \\ \forall v \in \mathbb{R}, & F(0, v) = \sin\left(\frac{v}{k}\right) \end{cases}$$

4. Déterminer les solutions de (S') .
5. Conclure.

Exercice 15. Soient $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, v > 0\}$ et l'application $\varphi : D \rightarrow D$ définie par $\varphi(u, v) = (\sqrt[3]{uv}, v)$.

1. Montrer que D est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que l'application φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de D dans D .
3. À l'aide du changement de variables $(x, y) = \varphi(u, v)$, résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x, y) \in D, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4 \frac{y^2}{x^2},$$

d'inconnue $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Montrer que f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^3 sur son image $f(\mathbb{R}^3)$, et que $f(\mathbb{R}^3)$ est un ouvert strictement inclus dans \mathbb{R}^3 .

IV. Dérivées partielles d'ordres supérieurs

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. Vérifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur \mathbb{R}^2 et calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en tout point de \mathbb{R}^2 .
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que f possède des dérivées partielles premières en tout point de \mathbb{R}^2 .
3. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?
4. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent à l'origine et les calculer.
5. Peut-on trouver un ouvert (de \mathbb{R}^2) contenant $(0, 0)$ sur lequel la fonction f de classe \mathcal{C}^2 ?