Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019

Mathématiques III - PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 4

LIMITES ET CONTINUITÉ DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

I. Un peu de topologie

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Les ensembles suivants sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}$?

1. $]a;b[$, $[a;b[$ et $[a;b]$,
2. $[a;+\infty[$ et $]-\infty;b[$,
3. $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 2. Déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) :

1. $\mathbb{R}^2 \backslash \big\{(0,0)\big\}$,
2. $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\big\}$,
3. $[-1;1] \times]0;2[$,
4. $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\big\}$,
5. $\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 5\big\}$.

Exercice 3. On se place dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 1$. Montrer qu'une boule ouverte est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ mais qu'une boule fermée ou une sphère n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

II. Limites

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ par $f(x,y) = \dfrac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}$.

1. Étudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, avec $m \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ donné.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'equation $y = x^2$.
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 6. Pour une fonction de deux variables à valeurs réelles, on considère trois types de limites :

$$(A)\quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\ ; \qquad (B)\quad \lim_{x\to a}\Big(\lim_{y\to b} f(x,y)\Big)\ ; \qquad (C)\quad \lim_{y\to b}\Big(\lim_{x\to a} f(x,y)\Big).$$

On considère les fonctions suivantes, définies où leur dénominateur ne s'annule pas :

$$f_1 : (x,y) \longmapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2 : (x,y) \longmapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3 : (x,y) \longmapsto \frac{\sin x}{y}, \quad f_4 : (x,y) \longmapsto \frac{\sin y}{x}.$$

Démontrer qu'en $(0,0)$:

— deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième n'existe,

— une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres n'existent,

— les limites (B) et (C) peuvent exister sans être égales.

Exercice 7. Étudier la limite à l'origine de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

Exercice 8. Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes pour $(x,y) \to (0,0)$ et (x,y) appartenant à l'ensemble de définition :

1. $f_1(x,y) = \dfrac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|}$,
2. $f_2(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$,
3. $f_3(x,y) = \dfrac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|}$,
4. $f_4(x,y) = \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2}$,
5. $f_5(x,y) = \dfrac{x^2}{y\ln(y-x^2)}$,
6. $f_6(x,y) = x^y = \mathrm{e}^{y\ln(x)}$.

Exercice 9. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x+y}$.

1. En passant en coordonnées polaires, déterminer une majoration simple de $|f(x,y)|$ pour (x,y) dans le domaine de définition de f.
2. Peut-on étudier à l'aide de la majoration précédente la limite de f en $(0,0)$?

Exercice 10. Calculer les limites à l'origine des fonctions suivantes à l'aide d'un passage aux coordonnées polaires.

1. $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$,
2. $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{x^2y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$.

Exercice 11. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner les définitions des limites suivantes :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty.$$

Étudier ensuite les limites pour $(x,y) \to (0,0)$ et pour $\|(x,y)\| \to \infty$ de la fonction

$$f : (x,y) \longmapsto \frac{(x^2+y^2+x+y+1)^\alpha}{x^2+y^2} \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ fixé}).$$

Exercice 12. Étudier les limites lorsque $(x,y) \to (0,0)$ ainsi que $\|(x,y)\| \to +\infty$ des fonctions suivantes

1. $(x,y) \longmapsto \dfrac{x\arctan y}{x^2+y^2+1}$,
2. $(x,y) \longmapsto \dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$,
3. $(x,y) \longmapsto \big(1+|x|+|y|\big)\sin(y^2)$,
4. $f(x,y) \longmapsto y\,\mathrm{e}^x + \ln|y|$.

Exercice 13. Étudier l'existence des limites des fonctions suivantes aux points donnés et déterminer leurs valeurs si elles existent :

1. $f_1 : (x,y) \longmapsto \dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $(1,0)$.
2. $f_2 : (x,y) \longmapsto \dfrac{x^3+(y+1)^3}{x^2+(y+1)^2}$ en $(0,-1)$,
3. $f_3 : (x,y) \longmapsto \dfrac{(x-1)^3(y-2)-(y-2)^2(x-1)}{(x-1)^4+(y-2)^2}$ en $(1,2)$,
4. $f_4 : (x,y) \longmapsto \dfrac{x+5}{(x+5)^2+y^2}$ en $(-5,0)$.

III. Continuité

Exercice 14. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1. Soit D une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à D est continue en $(0,0)$.
2. Peut-on en déduire que f est continue en $(0,0)$?

Exercice 15. Soient α et β deux réels strictement positifs. Étudier la continuité de $f : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \text{et } f(x,y) = 0 \text{ si } (x,y) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^+ \times \{0\}.$$

Exercice 16. Sur quelles parties de $\mathbb{R}^2$ les formules suivantes définissent-elles une fonction continue ?

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.
2. $g(x,y) = \sin\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$.

Démontrer que ces deux fonctions se prolongent par continuité au point $(0,0)$.

Exercice 17. Les fonctions suivantes peuvent-elles être prolongées par continuité sur les ensembles donnés :

1. $f : (x,y,z) \longmapsto \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$ sur $\mathbb{R}^3$;
2. $g : (x,y) \longmapsto \left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin(x), \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 18. Étudier la continuité des fonctions suivantes

1. $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} x^2y & \text{si } x < y, \\ y & \text{si } x \geq y \text{ ;} \end{cases}$
2. $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy} & \text{si } xy \neq 0, \\ 0 & \text{si } xy = 0 \text{ ;} \end{cases}$
3. $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} x^4 & \text{si } x^2 < y, \\ y^2 & \text{si } x^2 \geq y. \end{cases}$

Exercice 19. Établir si les fonctions suivantes sont bornées dans $\mathbb{R}^2$:

$$f_1 : (x,y) \longmapsto (x+2y^2)\exp\big(-|xy|\big), \quad f_2 : (x,y) \longmapsto \exp\big(\cos(1+xy)\big) \quad \text{et} \quad f_3 : (x,y) \longmapsto (x^4+y^2)\exp(-x^2-y^4).$$