

Feuille d'exercices n° 4

LIMITES ET CONTINUITÉ DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

I. Un peu de topologie

**Exercice 1.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Les ensembles suivants sont-ils ouverts dans  $\mathbb{R}$  ?

1.  $]a; b[$ ,  $[a; b[$  et  $[a; b]$ ,
2.  $[a; +\infty[$  et  $]-\infty; b]$ ,
3.  $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ .

**Exercice 2.** Déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$  (resp.  $\mathbb{R}^3$ ) :

1.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,
2.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ ,
3.  $[-1; 1] \times ]0; 2[$ ,
4.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ ,
5.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 5\}$ .

**Exercice 3.** On se place dans  $\mathbb{R}^n$  pour  $n \geq 1$ . Montrer qu'une boule ouverte est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  mais qu'une boule fermée ou une sphère n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

II. Limites

**Exercice 4.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par  $f(x, y) = \frac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}$ .

1. Étudier la limite pour  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  de la restriction de  $f$  aux droites d'équation  $y = mx$ , avec  $m \in \mathbb{R}$ .
2. En déduire que  $f$  n'a pas de limite à l'origine.

**Exercice 5.** Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Étudier la limite pour  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  de la restriction de  $f$  aux droites d'équation  $y = mx$ , avec  $m \in \mathbb{R}$  donné.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de  $f$  à la parabole d'équation  $y = x^2$ .
3. Montrer que  $f$  n'a pas de limite à l'origine.

**Exercice 6.** Pour une fonction de deux variables à valeurs réelles, on considère trois types de limites :

$$(A) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y); \quad (B) \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right); \quad (C) \lim_{y \rightarrow b} \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right).$$

On considère les fonctions suivantes, définies où leur dénominateur ne s'annule pas :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2 : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

$$f_3 : (x, y) \mapsto \frac{\sin x}{y}, \quad f_4 : (x, y) \mapsto \frac{\sin y}{x}.$$

Démontrer qu'en  $(0, 0)$  :

- deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième n'existe,
- une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres n'existent,
- les limites (B) et (C) peuvent exister sans être égales.

**Exercice 7.** Étudier la limite à l'origine de la fonction définie par  $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$ .

**Exercice 8.** Calculer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes quand  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  et  $(x, y)$  appartenant à l'ensemble de définition :

1.  $f_1(x, y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{|x| + |y|}$ ,
2.  $f_2(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ ,
3.  $f_3(x, y) = \frac{x^{1/3} y^2}{x^2 + y^2 + |x - y|}$ ,
4.  $f_4(x, y) = \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 + y^2}$ ,
5.  $f_5(x, y) = \frac{x^2}{y \ln(y - x^2)}$ ,
6.  $f_6(x, y) = x^y = e^{y \ln(x)}$ .

**Exercice 9.** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x, y) = \frac{x^4}{x + y}$ .

1. En passant en coordonnées polaires, déterminer une majoration simple de  $|f(x, y)|$  pour  $(x, y)$  dans le domaine de définition de  $f$ .
2. Peut-on étudier à l'aide de la majoration précédente la limite de  $f$  en  $(0, 0)$  ?

**Exercice 10.** Calculer les limites à l'origine des fonctions suivantes à l'aide d'un passage aux coordonnées polaires.

$$1. f : (x, y) \mapsto \frac{y^3}{x^2 + y^2}, \quad 2. f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y^3}{x^4 + x^2 y^2 + y^4}.$$

**Exercice 11.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $\ell \in \mathbb{R}$ . Donner les définitions des limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \ell$  et  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .

Étudier ensuite les limites pour  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  et pour  $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$  de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(x^2 + y^2 + x + y + 1)^\alpha}{x^2 + y^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ fixé}).$$

**Exercice 12.** Étudier les limites lorsque  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ainsi que  $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$  des fonctions suivantes :

$$1. (x, y) \mapsto \frac{x \arctan y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad 3. (x, y) \mapsto (1 + |x| + |y|) \sin(y^2),$$

$$2. (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2}, \quad 4. f(x, y) \mapsto y e^x + \ln |y|.$$

**Exercice 13.** Étudier l'existence des limites des fonctions suivantes aux points donnés et déterminer leurs valeurs si elles existent :

$$1. f_1 : (x, y) \mapsto \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ en } (1, 0).$$

$$2. f_2 : (x, y) \mapsto \frac{x^3 + (y + 1)^3}{x^2 + (y + 1)^2} \text{ en } (0, -1).$$

$$3. f_3 : (x, y) \mapsto \frac{(x - 1)^3(y - 2) - (y - 2)^2(x - 1)}{(x - 1)^4 + (y - 2)^2} \text{ en } (1, 2).$$

$$4. f_4 : (x, y) \mapsto \frac{x + 5}{(x + 5)^2 + y^2} \text{ en } (-5, 0).$$

### III. Continuité

**Exercice 14.** Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Soit  $D$  une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de  $f$  à  $D$  est continue en  $(0, 0)$ .
2. Peut-on en déduire que  $f$  est continue en  $(0, 0)$  ?

**Exercice 15.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs. Étudier la continuité de  $f : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad f(x, y) = 0 \text{ si } (x, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^+ \times \{0\}.$$

**Exercice 16.** Sur quelles parties de  $\mathbb{R}^2$  les formules suivantes définissent-elles une fonction continue ?

$$1. f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}. \quad 2. g(x, y) = \sin\left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2}\right).$$

Démontrer que ces deux fonctions se prolongent par continuité au point  $(0, 0)$ .

**Exercice 17.** Les fonctions suivantes peuvent-elles être prolongées par continuité sur les ensembles donnés ?

$$1. f : (x, y, z) \mapsto \frac{xy + yz}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \text{ sur } \mathbb{R}^3;$$

$$2. g : (x, y) \mapsto \left( \frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin(x), \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 18.** Étudier la continuité des fonctions suivantes

$$1. f : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 y & \text{si } x < y, \\ y & \text{si } x \geq y; \end{cases}$$

$$2. f : (x, y) \mapsto \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} & \text{si } xy \neq 0, \\ 0 & \text{si } xy = 0; \end{cases}$$

$$3. f : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^4 & \text{si } x^2 < y, \\ y^2 & \text{si } x^2 \geq y. \end{cases}$$

**Exercice 19.** Établir si les fonctions suivantes sont bornées sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$1. f_1 : (x, y) \mapsto (x + 2y^2) \exp(-|xy|),$$

$$2. f_2 : (x, y) \mapsto \exp(\cos(1 + xy)),$$

$$3. f_3 : (x, y) \mapsto (x^4 + y^2) \exp(-x^2 - y^4).$$