

Feuille d'exercices n° 2

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Exercice 1. Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les domaines considérés et déterminer la valeur de leur intégrale dans les cas intégrables :

1. $x \mapsto e^{-x}$ sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto e^{-|x|}$ sur \mathbb{R} ,
2. $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1; +\infty[$ et sur $]0; 1]$, discuter du résultat en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$,
3. $x \mapsto -\ln(x)$ sur $]0; 1]$ et $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ sur $[1; +\infty[$.

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur les intervalles donnés :

1. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^{1/2}}$ sur $]0; 1]$,
2. $t \mapsto \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)$ sur $]0; 1]$,
3. $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$,
4. $x \mapsto x^{a-1}e^{-x}$ sur $]0; +\infty[$, pour $a > 0$ fixé. On note lorsque cela a un sens $\Gamma(a) := \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x} dx$. Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$,
5. $x \mapsto x - \sqrt{1+x^2}$ sur $]0; +\infty[$,
6. $x \mapsto \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{x}$ sur $[1; +\infty[$,
7. $x \mapsto \frac{\sin^3(3x)}{\sin^2(2x)}$ sur $]0; \pi/2[$.

Exercice 3. Intégrales de Bertrand.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On veut étudier l'intégrabilité sur $[e; +\infty[$ de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$. (Les intégrales de Riemann sont supposées connues, mais pas les intégrales de Bertrand.)

1. On suppose $\alpha > 1$.
 - (a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{t^\gamma}{t^\alpha(\ln t)^\beta} \rightarrow 0$ quand t tend vers $+\infty$.
 - (b) En déduire l'intégrabilité de la fonction f sur $[e; +\infty[$.
2. On suppose $\alpha = 1$.
 - (a) Soit $x > e$. Calculer $\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt$.
 - (b) Déterminer pour quels $\beta \in \mathbb{R}$ la fonction f est intégrable sur $[e; +\infty[$.
3. On suppose enfin $\alpha < 1$.
 - (a) Déterminer la limite de $\frac{t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
 - (b) En déduire la non intégrabilité de la fonction f sur $[e; +\infty[$.
4. Étudier selon les valeurs de α et β l'intégrabilité de la fonction f sur $]0; 1/e]$.

Exercice 4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^a} dt$ soit convergente.

Exercice 5. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x \ln(2+x^2)} dx$,
2. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$,
3. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}} dt$,
4. $\int_0^1 \frac{\cosh x - \cos x}{x^{5/2}} dx$,
5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin(1/x^2)}{\ln(1+x)} dx$.

Exercice 6. Discuter, selon les valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

- $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt,$
- $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x}) dx,$
- $\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x \sqrt[3]{x^3 + \alpha x} \right) dx$ où $\alpha \in [-4; +\infty[.$

Exercice 7.

- Étudier l'intégrabilité sur $]1; +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}.$
- Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_2^3 f(x) dx \leq \frac{\ln 3}{2}.$$

Exercice 8. Étudier l'intégrabilité de la fonction $g : t \mapsto \ln(\text{th } t)$ sur $]0; +\infty[.$

Exercice 9. Montrer que les intégrales impropres suivantes convergent :

- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy;$
- $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ (intégrale de Fresnel).

Exercice 10. Démontrer l'énoncé suivant (critère de Cauchy) :

Théorème : Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale improprie $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ est convergente si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 1$ tel que pour tous $a, b > R$, on a

$$\left| \int_1^a f(x) dx - \int_1^b f(x) dx \right| = \left| \int_b^a f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Exercice 11. Démontrons de deux manières différentes que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[.$

- Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \geq \sin^2 t.$
 - Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ est convergente.
 - En déduire que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[.$

2. En utilisant les séries numériques :

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt.$
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\int_\pi^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{(k+1)\pi}.$
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$

En déduire la limite de $\sum_{k=2}^N \frac{1}{k}$ lorsque $N \rightarrow +\infty.$

- Conclure sur la non intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ sur $[1; +\infty[.$

Exercice 12. Démontrer l'énoncé suivant :

Théorème : Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante. On a alors l'équivalence suivante :

La suite $\left(\sum_{n=1}^N f(n) \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie $\iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R}^+$ (i.e. f est intégrable sur $[1; +\infty[)$)

Exercice 13. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $[a; +\infty[.$ Montrer que si f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ en $+\infty$, cette limite est nécessairement nulle.