

Feuille d'exercices n° 1

RÉVISIONS SUR LES COMPARAISONS LOCALES DE FONCTIONS

Exercice 1. Soient f, g et h des fonctions réelles de la variable réelle définies sur un voisinage (éventuellement pointé) de x_0 (avec $x_0 \in \mathbb{R}$ ou x_0 infini). Démontrer les assertions suivantes :

1. si $g = o_{x_0}(h)$, alors $fg = o_{x_0}(fh)$,
2. si $f \sim_{x_0} g$ et $h = o_{x_0}(f)$, alors $h = o_{x_0}(g)$,
3. si $f = o_{x_0}(g)$ et $g = \mathcal{O}_{x_0}(h)$, alors $f = o_{x_0}(h)$.

Exercice 2. Soit $f : x \mapsto x^4 + \cos(x) + \frac{1}{x}$. Pour les fonctions g suivantes, expliquer si l'on a ou non $f \underset{+\infty}{\sim} g$:

1. $g(x) = x^4$, 2. $g(x) = 2x^4$, 3. $g(x) = x^4 + 1$, 4. $g(x) = x^4 + \frac{1}{x}$.

Exercice 3. Vrai ou faux ?

1. $x \underset{0}{\sim} 0$,
2. $x^3 \underset{+\infty}{=} o(x^3 + x^2)$,
3. $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$,
4. $1 \underset{0}{=} \cos(x) + o(x^2)$,
5. $o(f) + o(f) \underset{x_0}{=} o(f)$,
6. $o(x^2) + o(x) \underset{0}{=} o(x)$,
7. $\ln(1+x) - x \underset{0}{=} o(1)$.

Exercice 4. Comparer les expressions suivantes :

1. $x \ln x$ et $\ln(1+2x)$ au voisinage de 0,
2. $x \ln x$ et $\sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) \sin(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5. Calculer, si elles existent, les limites des expressions suivantes au point indiqué :

1. $\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$ en 0,
2. $\left(\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)} \right)$ en 0,
3. $(\operatorname{ch} x)^{1/\operatorname{sh}^2 x}$ en 0,
4. $\frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos x}$ en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 6. Prouver l'existence de la limite quand $x \rightarrow 0^-$ de l'expression $\frac{x^2 \sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}{\sin(\tan^2 x) \ln(1+x)}$, et la calculer.

Exercice 7. On considère la fonction $f :]-\frac{1}{2}; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x$.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x)$.
2. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

Exercice 8. Soit λ un réel. On considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\lambda(x) = x^\lambda \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)$.

1. Déterminer des équivalents simples de $f_\lambda(x)$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.
2. Pour quelles valeurs de λ la fonction f_λ est-elle prolongeable par continuité (à droite) en 0 ?
3. Pour quelles valeurs de λ la fonction f_λ est-elle dérivable (à droite) en 0 ?