Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Feuille d'exercices n°9

Vecteurs du plan

Exercice 1.

1. Écrire les matrices des applications linéaires suivantes :
   (a) pour $\lambda \in \mathbf{R}$, l'homothétie de rapport λ et de centre l'origine $(0,0)$;
   (b) pour $\theta \in \mathbf{R}$, la rotation d'angle θ et de centre l'origine $(0,0)$;
   (c) pour $\theta \in \mathbf{R}$, la symétrie orthogonale par rapport à un axe formant un angle θ avec l'axe réel et passant par l'origine $(0,0)$.
2. Écrire les matrices des réciproques des applications linéaires précédantes.
3. Montrer que la composée de deux symétries othogonales linéaires est une rotation.
4. Montrer que la composée de deux rotations linéaires est une rotation.

Exercice 2.

1. Soit $v \in \mathbf{R}^2$.
   (a) Montrer qu'il existe $v^\perp \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $w \in \mathbf{R}^2$, l'on ait :
   $$\det(v,w) \;=\; \langle v^\perp, w\rangle.$$
   (b) On suppose v non nul. Montrer que $(v, v^\perp)$ est une base orthogonale.
2. Soit A, B et C des points d'affixes respectives a, b et c.
   (a) Exprimer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ à l'aide de a, b et c.
   (b) À quelle condition sur a, b et c les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 3. Pour les droites qui suivent, donner un de leurs points et un vecteur directeur, puis les écrire sous forme paramétrique.

1. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(1,1)$ et de vecteur normal $(2,-3)$.
2. $\mathcal{D}_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x = 3 \right\}$.
3. $\mathcal{D}_3$ la droite d'équation $x - 4y = 8$.
4. $\mathcal{D}_4$ la droite d'équation $y = 3x + 5$.
5. $\mathcal{D}_5$ la droite passant par $(-1,2)$ et $(3,1)$.
6. $\mathcal{D}_6$ la médiatrice du segment reliant $(0,2)$ et $(-1,1)$.
7. $\mathcal{D}_7 = \left\{ M \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \langle \overrightarrow{OM}, u\rangle = 3 \right\}$ où O est l'origine $(0,0)$ et u le vecteur $(1,1)$.

Exercice 4. Pour les droites qui suivent, donner un de leurs points et un vecteur normal, puis en donner une équation.

1. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(3, 7)$ et de vecteur directeur $(1, -1)$.
2. $\mathcal{D}_2 = \{ (1, 4) + t(1, 0) \mid t \in \mathbf{R} \}$.
3. $\mathcal{D}_3 = \{ (2 + 3t, 4t) \mid t \in \mathbf{R} \}$.
4. $\mathcal{D}_4$ la droite passant par $(-1, 1)$ et $(0, 1)$.
5. $\mathcal{D}_5$ la médiatrice du segment reliant $(1, 2)$ et $(-1, 0)$.

Exercice 5. Soit $t \in \mathbf{R}$. On considère dans $\mathbf{R}^2$ les vecteurs :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t+2 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbf{R}$ pour lesquels la famille (e_1, e_2) est orthogonale.
2. (a) Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbf{R}$ pour lesquels la famille (e_1, e_2) forme une base du plan.
   (b) Pour de tels t, donner les matrices de passage par rapport à la base canonique.

Exercice 6. Soit $((a, c), (b, d)) \in (\mathbf{R}^2)^2$. On définit l'application linéaire

$$\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \quad (x, y) \mapsto x\,(a, b) \;+\; y\,(c, d)\,.$$

1. Écrire la matrice de ϕ dans la base canonique.
2. À quelle condition ϕ est-elle bijective ?

On suppose désormais cette condition remplie.

3. Écrire la matrice de ϕ^{-1} dans la base canonique.

Exercice 7. Déterminer si les couples qui suivent forment des bases du plan. Lorsque ce ne sont pas des bases, écrire explicitement leur colinéarité. Lorsque ce sont des bases, calculer l'aire du parallélogramme correspondant, donner les matrices de changement de bases par rapport à la base canonique et les matrices dans la base canonique de la projection sur la droite vectorielle dirigée par le premier vecteur le long de la droite vectorielle dirigée par le second vecteur et de la symétrie par rapport à cette première droite le long de cette seconde droite.

1. $((0, 0), (0, 0))$.
2. $((0, 1), (1, 1))$.
3. $((2, 4), (1, 2))$.
4. $((0, 0), (1, 0))$.
5. $((1, 1), (2, 3))$.
6. $((0, 1), (1, 0))$.

Exercice 8. Résoudre en $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ les systèmes qui suivent. Vous donnerez la nature de l'ensemble des solutions.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \\ y & = & 2 \end{array} \right. .$
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 1 \\ 3x + 3y & = & 2 \end{array} \right. .$
3. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y & = & 5 \\ 2x + y & = & 2 \end{array} \right. .$
4. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 5 \\ 8x + 8y & = & 20 \end{array} \right. .$

Exercice 9. *Médiatrice.*

1. Soit A et B deux points distincts. On note I leur milieu, c'est-à-dire le point I tel que $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.
   Montrer que, pour tout point M, sont équivalents :
   (i) $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$;
   (ii) $\langle \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$.
   On appelle *médiatrice* du segment $[A, B]$ l'ensemble $\left\{ M \,\middle|\, \|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| \right\}$.
2. Soit A, B et C trois points non alignés.
   Montrer que l'intersection des médiatrices de $[A, B]$, $[B, C]$ et de $[A, C]$ est non vide.

Exercice 10. On note A et B les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$. Soit $a \in \mathbf{R}$.
Déterminer en fonction de a la nature de l'ensemble

$$E \;=\; \{\; M \mid \|AM\| = a\|BM\| \;\}\,.$$

Exercice 11. *Projection et symétrie orthogonales (par rapport à une droite).*
Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et de vecteur directeur u.
Soit M un point. On définit P par $\overrightarrow{AP} = \langle \frac{u}{\|u\|}, \overrightarrow{AM} \rangle \frac{u}{\|u\|}$.

1. Montrer que $P \in \mathcal{D}$ et que $\overrightarrow{MP} \perp u$.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}^\star$, $\|\overrightarrow{MP} + tu\| > \|\overrightarrow{MP}\|$.
3. On définit M' par $\overrightarrow{PM'} = -\overrightarrow{PM}$. Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MP}$.

Exercice 12. Soit $\mathcal{D}$ la droite du plan d'équation $y = 3x$.

1. Donner explicitement la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.
2. Calculer la distance du point $M_1 = (3, -1)$ à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 13. Calculer les angles entre les objets qui suivent.

1. Les vecteurs du plan $u_1 = (0, 1)$ et $v_1 = (3, -3)$.
2. Des droites du plan $\mathcal{D}_2$ et Δ_2 de vecteurs normaux $u_2 = (\sqrt{3}, -1)$ et $v_2 = (3, \sqrt{3})$.