Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2012-2013
Math I - CPGEI

Feuille d'exercices n° 9
DÉRIVABILITÉ

Exercice 1. Déterminer en quels points les fonctions qui suivent sont dérivables, et donner leur dérivée.

1. $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto |x|$;
3. $f_3 :]1, +\infty[\to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \ln(\ln x)$;
4. $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto (x^2 + x^4)^{\frac{1}{4}}$;
5. $f_5 : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}} (\cos(x))^5$;
6. $f_6 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+1}+2}$;
7. $f_7 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto (x^2+1)\, 2^x$;
8. $f_8 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 2. On définit $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$.

1. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de f.
2. Déterminer en quels points le graphe de f intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
3. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
4. Montrer que f admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Déterminer la position du graphe de f par rapport aux asymptotes.
6. Tracer le graphe de f avec précision.

Exercice 3. On s'intéresse à la fonction tangente.

1. Redémontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\,\mathbf{Z}\right)$, $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$.
2. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de tan.
3. Déterminer en quels points le graphe de f intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
4. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
5. Tracer le graphe de tan avec précision.

Exercice 4. On définit $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto x - \ln(1+x^2)$.

1. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de f.
2. Déterminer en quels points le graphe de f intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
3. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
4. Montrer que f admet des directions asymptotiques en $+\infty$ et en $-\infty$, mais pas d'asymptotes.
5. Tracer le graphe de f avec précision.

Exercice 5. On définit $x : [0, 2\pi[\to \mathbf{R}$, $t \longmapsto \cos(t)$ et $y : [0, 2\pi[\to \mathbf{R}$, $t \longmapsto \sin(t)$ et l'on s'intéresse à la courbe $\gamma : [0, 2\pi[\to \mathbf{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), y(t))$. Soit $t_0 \in [0, 2\pi[$.

1. Donner $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$a\,(x(t) - x(t_0)) \; + \; b\,(y(t) - y(t_0)) \overset{t \to t_0}{=} \mathcal{O}\,(\,\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|\,)\,.$$

2. En déduire une mesure de l'angle entre la tangente à γ en $\gamma(t_0)$ et l'axe des ordonnées.

Exercice 6. *Folium de Descartes.*
On définit d'abord $x : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $t \longmapsto \dfrac{3t}{1+t^3}$ et $y : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $t \longmapsto \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ puis $\gamma : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), y(t))$.
L'objectif de cet exercice est de tracer la courbe $\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}\}$.

1. Calculer, pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, $x(1/t)$ et $y(1/t)$.
   En déduire que l'on peut se ramener à étudier γ sur $]-1, 1]$.
2. Dresser les tableaux de variation de x et de y.
3. (a) Calculer, pour tout $t \in]-1, 1]$, $y(t) - (-x(t) - 1)$.
   (b) Déterminer le signe de cette expression pour $t \in]-1, 1]$, puis sa limite quand t tend vers -1.
   (c) Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
4. Tracer Γ.
5. On définit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy$. Calculer $f \circ \gamma$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivables.
On pose $h = \min(\{f, g\})$, autrement dit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \min(\{f(x), g(x)\})$.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) < g(x_0)$.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $h(x) = f(x)$.
2. En déduire que h est dérivable en x_0.

Exercice 8. Soit $a \in \mathbf{Z}$. On définit $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur a, f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. À quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 9. Montrer qu'existent et déterminer les limites suivantes,

$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{e^{x\cos(x)} - 1}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{\cos(1+x) - \cos(1-x)}{x}\,.$$

Exercice 10.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, l'on a : $e^x > 1 + \frac{1}{2}x^2$.
2. Montrer que la limite $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x^2)}{e^x - 1 - \frac{1}{2}x^2}$ existe et la calculer.

Exercice 11. Soit $r \in [0, 1]$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 0]$, l'on a : $|1 + x|^r \leq 1$.
2. Montrer que, pour tout $x \in]-\infty, -1[$, l'on a : $|1 + x|^r \leq |x|^r$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'on a : $|1 + x|^r \ \leq \ 1 \ + \ |x|^r$.
4. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, l'on a : $|a + b|^r \leq |a|^r + |b|^r$.
5. En déduire que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, l'on a : $||a|^r - |b|^r| \leq |a - b|^r$.

Exercice 12.

1. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ continue, et dérivable sur l'intérieur de I.
   Montrer que si f' est croissante, alors
   $$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall t \in [0, 1], \qquad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$
   On dit alors que f est *convexe*.
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ et tout $t \in [0, 1]$, l'on a :
   $$\ln(tx + (1-t)y) \ \geq \ t\ln(x) + (1-t)\ln(y).$$
3. Soit $(p, q) \in [1, +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
   (a) Montrer que, pour tout $(a, b) \in (\mathbf{R}_+)^2$, l'on a :
   $$ab \ \leq \ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$
   (b) En déduire que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}_+$ et tout $\lambda > 0$,
   $$ab \ \leq \ \lambda^p \ \frac{a^p}{p} + \lambda^{-q} \ \frac{b^q}{q}.$$
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $((a_1, \cdots, a_n), (a_1, \cdots, a_n)) \in (\mathbf{R}^n)^2$,
   $$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \ \leq \ \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 13.

1. Montrer que l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto e^{x^7 + x^5 + 1}$ est injective.
2. Déterminer $E \subset \mathbf{R}$ tel que $\tilde{f} : \mathbf{R} \to E$, $x \longmapsto f(x)$ soit une bijection.

Exercice 14. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} \in (\mathbf{R}_+^\star)^{\mathbf{N}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note f_n la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \sum_{i=1}^n a_i x^i \end{array}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, il existe un unique $x_n \in \mathbf{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge.

Exercice 15.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 < \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$.
   On peut donc définir $\phi : \mathbf{R} \to]-1,1[$, $x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
2. Montrer que ϕ est une bijection. On notera ψ son inverse.
3. Justifier que ψ est deux fois dérivable.
4. On pose $\lambda = \cos \circ \psi$. Justifier que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\lambda(\phi(t)) = \cos(t)$.
5. En déduire les valeurs de $\lambda'(0)$ et $\lambda''(0)$.

Exercice 16. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ deux fois dérivable telle que f'' soit continue.
Soit $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \neq b$.
Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$, on définit $\phi_{\alpha,\beta} : [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \alpha + \beta(x-a)$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(a) = \phi_{\alpha,\beta}(a)$ et $f(b) = \phi_{\alpha,\beta}(b)$.
2. Montrer que si $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une fonction deux fois dérivables qui s'annule au moins trois fois, alors g'' s'annule au moins une fois.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1] \setminus \{a,b\}$, il existe γ_x tel que $f(x) = \phi_{\alpha,\beta}(x) + \gamma_x(x-a)(x-b)$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f(x) - (\alpha + \beta(x-a))| \ \leq\ |(x-a)(x-b)|\ \frac{1}{2} \max_{[0,1]} |f''|.$$

Exercice 17. Déterminer si elles existent les valeurs des bornes inférieures et supérieures des ensembles qui suivent, et le cas échéant si ce sont des minima ou des maxima.

1. $A_1 = \left\{ e^{-x^2} \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\}$;
2. $A_2 = \left\{ \dfrac{1+x}{1+x^2} \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\}$;
3. $A_3 = \left\{ x^4 - 6x^2 \mid x \in \mathbf{R} \right\}$;
4. $A_4 = \left\{ 6x - x^2 \mid x \in [2,5] \right\}$;
5. $A_5 = \left\{ x^2 + y^2 \mid (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ xy = 1 \right\}$;
6. $A_6 = \{ e^x \cos(x) \mid x \in \mathbf{R} \}$.

Exercice 18. On pose

$$A = \left\{ \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x-y} \;\middle|\; (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x \neq y \right\}.$$

Montrer que A possède des bornes inférieure et supérieure et les déterminer.

Exercice 19.

1. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $e^x - 1 > x > 0$.
   Indication : on pourra au choix étudier les variations d'une fonction bien choisie, appliquer le théorème des accroissements finis ou écrire $e^x - 1$ comme une intégrale.

   (b) En déduire que si $x \geq 0$ vérifie $x(e^x - 1) = x^2$, alors $x = 0$.

2. On définit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{R}_+^\star)^{\mathbf{N}}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{e^{u_n} - 1}$.

   (a) Montrer que (u_n) est décroissante.

   (b) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 20.

1. Soit I un intervalle et $A : I \to \mathbf{R}$ dérivable. On pose $a = A'$.
   Montrer qu'il existe $\phi : I \to \mathbf{R}_+^*$ dérivable tel que, pour tout $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable,
$$\phi \ \big(f' - af\big) \ = \ (\phi \ f)'.$$
2. Soit $a \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ dérivable. On suppose que $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ f'(t) \leq a\, f(t)$.
   Montrer que $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ f(t) \leq f(0)\, e^{at}$.

Exercice 21.

1. Résoudre, en $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable, les équations qui suivent.

   (a) $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + 3f(t) = \cos(t) + te^t + e^{-3t}$;

   (b) $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + \dfrac{t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\, f(t) = 0$;

   (c) pour $\alpha \in \mathbf{R}$: $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + tf(t) = t\, e^{\alpha t^2}$;

   (d) pour $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$: $\forall t \in \mathbf{R}_+^\star,\ t\, f'(t) + \alpha\, f(t) = t^\beta$.

2. Pour la première équation, donner la solution vérifiant $f(0) = 1$.

Exercice 22. On s'intéresse à l'équation différentielle
$$x\ y'(x) \ + \ y(x) \ = \ \cos(x). \tag{1}$$
1. Résoudre (1) sur $]\,0\,, +\infty[$ puis sur $]-\infty\,, 0\,[$.
2. Résoudre (1) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 23. On s'intéresse à l'équation différentielle
$$|x|\ y'(x) \ + \ (x-1)\ y(x) \ = \ x^2. \tag{2}$$
1. Résoudre (2) sur $]\,0\,, +\infty[$.
2. Résoudre (2) sur $]-\infty\,, 0\,[$.
3. Résoudre (2) sur $\mathbf{R}$.