Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 9

DÉRIVABILITÉ

Exercice 1. Déterminer en quels points les fonctions qui suivent sont dérivables, et donner leur dérivée.

1. $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2+1 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto |x|$;
3. $f_3 :]1, +\infty[\to \mathbf{R},\ x \longmapsto \ln(\ln x)$;
4. $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto (x^2+x^4)^{\frac{1}{4}}$;
5. $f_5 : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R},\ x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}\,(\cos(x))^5$;
6. $f_6 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+1}+2}$;
7. $f_7 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto (x^2+1)\,2^x$;
8. $f_8 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 2. On définit $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$.

1. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de f.
2. Déterminer en quels points le graphe de f intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
3. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
4. Montrer que f admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Déterminer la position du graphe de f par rapport aux asymptotes.
6. Tracer le graphe de f avec précision.

Exercice 3. On s'intéresse à la fonction tangente.

1. Redémontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\,\mathbf{Z})$, $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$.
2. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de tan.
3. Déterminer en quels points son graphe intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
4. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
5. Tracer le graphe de tan avec précision.

Exercice 4. On définit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto x - \ln(1+x^2)$.

1. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de f.
2. Déterminer en quels points le graphe de f intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
3. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
4. Montrer que f admet des directions asymptotiques en $+\infty$ et en $-\infty$, mais pas d'asymptotes.
5. Tracer le graphe de f avec précision.

Exercice 5. On définit $x : [0, 2\pi[\to \mathbf{R}^2$, $t \longmapsto \cos(t)$ et $y : [0, 2\pi[\to \mathbf{R}^2$, $t \longmapsto \sin(t)$ et l'on s'intéresse à la courbe $\gamma : [0, 2\pi[\to \mathbf{R}^2$, $t \longmapsto (x(t), y(t))$. Soit $t_0 \in [0, 2\pi[$.

1. Donner $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$a\,(x(t) - x(t_0)) \;+\; b\,(y(t) - y(t_0)) \overset{t \to t_0}{=} \mathrm{o}\,(\,t - t_0\,)\,.$$

2. En déduire une mesure de l'angle entre la tangente à γ en $\gamma(t_0)$ et l'axe des ordonnées.

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivables.
On pose $h = \min(\{f, g\})$, autrement dit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \min(\{f(x), g(x)\})$.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) < g(x_0)$.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $h(x) = f(x)$.
2. En déduire que h est dérivable en x_0.

Exercice 7. Soit $a \in \mathbf{Z}$. On définit $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R},\ x \longmapsto x^a\ \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur a, f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. À quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée est-elle continue en 0 ?

Exercice 8. Montrer qu'existent et déterminer les limites suivantes,

$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{e^{x\cos(x)} - 1}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{\cos(1+x) - \cos(1-x)}{x}\,.$$

Exercice 9.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, l'on a : $e^x > 1 + \frac{1}{2}x^2$.
2. Montrer que la limite $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - 1 - \frac{1}{2}x^2}$ existe et la calculer.

Exercice 10. Soit $r \in [0, 1]$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1, 0]$, l'on a : $|1 + x|^r \leq 1$.
2. Montrer que, pour tout $x \in]-\infty, -1[$, l'on a : $|1 + x|^r \leq |x|^r$.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'on a : $|1 + x|^r \;\leq\; 1 \;+\; |x|^r$.
4. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, l'on a : $|a + b|^r \leq |a|^r + |b|^r$.
5. En déduire que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, l'on a : $||a|^r - |b|^r| \leq |a - b|^r$.

Exercice 11. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$.
Pour tout $x \in I$, on définit $\phi_x : I \setminus \{x\} \to \mathbf{R}$, $y \longmapsto \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

1. Montrer que sont équivalents :
   (i) Pour tout $(x,y) \in I^2$, pour tout $t \in [0,1]$, $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$.
   (ii) Pour tout $(x,y,z) \in I^3$ tel que $x < z < y$, $\phi_z(x) \leq \phi_z(y)$.

   Si l'une des propriétés est vérifiée, on dit que f est convexe.
2. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I.
   (a) Montrer que sont équivalents :
      (i) f est convexe.
      (ii) La dérivée de f est croissante.
   (b) Montrer que si f est convexe, alors le graphe de f est au-dessus de toute tangente.
3. (a) Montrer que, pour tout $(x,y,z) \in I^3$, avec x, y et z deux à deux disjoints, on a :
   $$\phi_x(y) - \phi_x(z) \ = \ \frac{y-z}{y-x}\ (\phi_z(y) - \phi_z(x)) \,.$$
   (b) Soit $(x,y,z) \in I^3$ tel que $x < z < y$ et $\phi_z(x) \leq \phi_z(y)$.
   Montrer que $\phi_x(z) \leq \phi_x(y)$ et $\phi_y(x) \leq \phi_y(z)$.
   (c) Montrer que sont équivalents :
      (i) f est convexe.
      (ii) Pour tout $x \in I$, ϕ_x est croissante.
4. On suppose f convexe.
   (a) Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en tout point de l'intérieur de I, que $f'_g \leq f'_d$ et que f'_g et f'_d sont croissantes.
   (b) Montrer que le graphe de f est au-dessus de toute tangente à gauche ou à droite.

Exercice 12. Soit $(p,q) \in [1,+\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ et tout $t \in [0,1]$, l'on a :
   $$\ln(tx+(1-t)y) \ \geq \ t\ln(x)+(1-t)\ln(y).$$
2. Montrer que, pour tout $(a,b) \in (\mathbf{R}_+)^2$, l'on a :
   $$ab \ \leq \ \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$
3. En déduire que, pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}_+$ et tout $\lambda > 0$,
   $$ab \ \leq \ \lambda^p\,\frac{a^p}{p}+\lambda^{-q}\,\frac{b^q}{q}.$$
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $((a_1,\cdots,a_n),(b_1,\cdots,b_n)) \in (\mathbf{R}^n)^2$,
   $$\sum_{i=1}^n |a_ib_i| \ \leq \ \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 13.

1. Montrer que l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto e^{x^7+x^5+1}$ est injective.
2. Déterminer $E \subset \mathbf{R}$ tel que $\tilde{f} : \mathbf{R} \to E$, $x \longmapsto f(x)$ soit une bijection.

Exercice 14. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} \in (\mathbf{R}_+^\star)^{\mathbf{N}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note f_n la fonction

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \sum_{i=1}^n a_i x^i \end{array} .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, il existe un unique $x_n \in \mathbf{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge.

Exercice 15.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 < \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$.

   On peut donc définir $\phi : \mathbf{R} \to]-1,1[$, $x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
2. Montrer que ϕ est une bijection. On notera ψ son inverse.
3. Justifier que ψ est deux fois dérivable.
4. On pose $\lambda = \cos \circ \psi$. Justifier que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\lambda(\phi(t)) = \cos(t)$.
5. En déduire les valeurs de $\lambda'(0)$ et $\lambda''(0)$.

Exercice 16. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ deux fois dérivable telle que f'' soit continue.
Soit $(a,b) \in [0,1]^2$ tel que $a \neq b$.
Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$, on définit $\phi_{\alpha,\beta} : [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \alpha + \beta(x-a)$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(a) = \phi_{\alpha,\beta}(a)$ et $f(b) = \phi_{\alpha,\beta}(b)$.
2. Montrer que si $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une fonction deux fois dérivables qui s'annule au moins trois fois, alors g'' s'annule au moins une fois.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1] \setminus \{a,b\}$, il existe γ_x tel que $f(x) = \phi_{\alpha,\beta}(x) + \gamma_x(x-a)(x-b)$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f(x) - (\alpha + \beta(x-a))| \ \leq \ |(x-a)(x-b)| \ \frac{1}{2} \max_{[0,1]} |f''|.$$

Exercice 17. Déterminer si elles existent les valeurs des bornes inférieures et supérieures des ensembles qui suivent, et le cas échéant si ce sont des minima ou des maxima.

1. $A_1 = \left\{ e^{-x^2} \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\}$;
2. $A_2 = \left\{ \dfrac{1+x}{1+x^2} \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\}$;
3. $A_3 = \{ x^4 - 6x^2 \mid x \in \mathbf{R} \}$;
4. $A_4 = \{ 6x - x^2 \mid x \in [2,5] \}$;
5. $A_5 = \{ x^2 + y^2 \mid (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ xy = 1 \}$;
6. $A_6 = \{ e^x \cos(x) \mid x \in \mathbf{R} \}$.

Exercice 18. On pose
$$A = \left\{ \frac{\cos(x) - \cos(y)}{x - y} \;\middle|\; (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x \neq y \right\}.$$
Montrer que A possède des bornes inférieure et supérieure et les déterminer.

Exercice 19. On définit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto x - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Soit $x^{(0)} \in \mathbf{R}$. On note $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite, définie par récurrence, telle que $x_0 = x^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que si (x_n) converge alors (x_n) converge vers 0.
2. (a) Montrer que f est décroissante.
   (b) En déduire que $f \circ f$ est croissante.
   (c) Justifier que $(f \circ f)(\mathbf{R}_+) \subset \mathbf{R}_+$ et que $(f \circ f)(\mathbf{R}_-) \subset \mathbf{R}_-$
   (d) Montrer que $(x_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont monotones et de monotonies opposées.
3. (a) Étudier les signes de $f - \mathrm{Id}_\mathbf{R}$ et $f + \mathrm{Id}_\mathbf{R}$. *Consigne :* on admettra que $2\ln(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3} > 0$ et l'on ne cherchera pas à donner des conditions complétement explicites.
   (b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| \leq \ln(2 + \sqrt{3})$, on a $|f(x)| \leq |x|$.
   (c) En déduire également qu'il existe $R_0 > \ln(2 + \sqrt{3})$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| > R_0$, l'on ait $|f(x)| > |x|$.
   (d) Étudier les points fixes de $(f \circ f)_{|[-\ln(2+\sqrt{3}), \ln(2+\sqrt{3})]}$.
4. En déduire que si $|x^{(0)}| < \ln(2 + \sqrt{3})$ alors (x_n) converge.
5. En déduire également que si $|x^{(0)}| > R_0$, alors (x_n) diverge.
6. Montrer que, pour tout $\kappa > 0$, il existe $\delta_\kappa > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\delta_\kappa, \delta_\kappa[$, $|f(x)| \leq \kappa|x|$.
7. En déduire que si (x_n) converge, alors, pour tout $0 < \kappa < 1$, il existe $n_\kappa \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_\kappa$, $|x_n| \leq \kappa^{n-n_\kappa}|x_{n_\kappa}|$.

Exercice 20.

1. Soit I un intervalle et $A : I \to \mathbf{R}$ dérivable. On pose $a = A'$.
   Montrer qu'il existe $\phi : I \to \mathbf{R}_+^*$ dérivable tel que, pour tout $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable,
   $$\phi\ \left(f' - af\right) \ = \ (\phi\ f)'.$$
2. Soit $a \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ dérivable. On suppose que $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ f'(t) \leq a\, f(t)$.
   Montrer que $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ f(t) \leq f(0)\, e^{at}$.

Exercice 21.

1. Résoudre, en $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable, les équations qui suivent.
   (a) $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + 3f(t) = \cos(t) + te^t + e^{-3t}$;
   (b) $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + \dfrac{t}{1+t^2}\ln(1 + t^2)\, f(t) = 0$;
   (c) pour $\alpha \in \mathbf{R}$: $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + tf(t) = t\, e^{\alpha t^2}$;
   (d) pour $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$: $\forall t \in \mathbf{R}_+^\star,\ t\, f'(t) + \alpha\, f(t) = t^\beta$.
2. Pour la première équation, donner la solution vérifiant $f(0) = 1$.

Exercice 22. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$x\ y'(x)\ +\ y(x)\ =\ \cos(x). \tag{1}$$

1. Résoudre (1) sur $]\,0\,,\,+\infty[$ puis sur $]-\infty\,,\,0\,[$.
2. Résoudre (1) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 23. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$|x|\ y'(x)\ +\ (x-1)\ y(x)\ =\ x^2. \tag{2}$$

1. Résoudre (2) sur $]\,0\,,\,+\infty[$.
2. Résoudre (2) sur $]-\infty\,,\,0\,[$.
3. Résoudre (2) sur $\mathbf{R}$.