Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 9

Géométrie affine (II) - Barycentres

Exercice 1.

1. Soit n un entier naturel non nul. On considère $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ et $(B_1, B_2, \ldots B_n)$ deux familles de n points du plan dont on note respectivement G et H les isobarycentres.
   Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} = n\overrightarrow{GH}$.
2. (a) Montrer que l'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB).
   (b) Montrer que si les points A, B, C ne sont pas alignés, tout point du plan est barycentre de ces trois points.

Exercice 2. Soient A, B, C, D quatre points du plan affine $\mathcal{E}$. On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs de AB, AC, AD, BC, CD, DE. On note aussi E, F, G, H les isobarycentres respectifs des points (B, C, D), (A, C, D), (A, B, D) et (A, B, C). Montrer que les droites (IM), (JN), (KL), (AE), (BF), (CG) et (DH) sont concourantes.
Indication : utiliser la propriété d'associativité des barycentres.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i). le barycentre G de toute famille finie $\{(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_k, \lambda_k)\}$ de points pondérés de C tels que $\lambda_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, appartient à C,
   (ii). $\forall M, N \in C,\ [MN] = \{M + \lambda\overrightarrow{MN} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset C$.
   Une partie vérifiant les conditions précédentes est dite convexe.
2. Soit C une partie convexe de $\mathcal{E}$. Soit $P \in C$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i). $\forall M, N \in C,\ P = \mathrm{Bar}((M, 1/2), (N, 1/2)) \Rightarrow M = P = N$,
   (ii). $\forall M, N \in C,\ \forall \lambda \in]0; 1[,\ P = \mathrm{Bar}((M, 1 - \lambda), (N, \lambda)) \Rightarrow M = P = N$,
   (iii). Le complémentaire C_0 de $\{P\}$ dans C est convexe.
   Un tel point P de la partie convexe C, qui ne peut être isobarycentre de deux points distincts de C est appelé point extrémal de C.

Exercice 4.

1. Soit f une application affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans lui-même telle qu'il existe un entier naturel non nul n pour lequel f^n admet un point fixe A. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit f une isométrie du plan affine euclidien telle qu'il existe un entier naturel n pour lequel f^n est la rotation de centre A et d'angle $\theta \neq 0 \mod 2\pi$. Déterminer f.

Exercice 5. Déterminer toutes les applications affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans lui-même commutant avec toutes les translations.

Exercice 6. Déterminer les déplacements et les réflexions de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ laissant globalement invariante une sphère donnée.

Exercice 7.

1. On se place dans le plan affine muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient D une droite affine d'équation $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan.
   (a) On note $H(x, y)$ la projection orthogonale de M_0 sur D. Déterminer les coordonnées de H.
   (b) En déduire la formule donnant la distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite D (en fonction de a, b, c, x_0 et y_0).
2. On se place désormais dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soient P un plan affine d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.
   (a) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale $H(x, y, z)$ du point M_0 sur P.
   (b) En déduire la distance du point M_0 au plan P.

Exercice 8.

1. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.
2. On munit $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et on considère les points $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ et $C(2, -1, 3)$. Déterminer les points D situés sur la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$ tels que $ABCD$ est un tétraèdre de volume égal à 5.