Feuille d'exercices n°8
GÉOMÉTRIE

<u>Exercice 1.</u> On note A le point d'affixe $4+2i$ et O celui d'affixe 0.
Calculer les affixes des points B tels que le triangle OAB soit équilatéral.

<u>Exercice 2.</u> Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites du plan non parallèles.
Montrer qu'elles s'intersectent en un seul point.

<u>Exercice 3.</u> On rappelle l'identification canonique de $\mathbf{R}^2$ et de $\mathbf{C}$ par l'application affixe et sa réciproque :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{C} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{C} & \to & \mathbf{R}^2 \\ z & \mapsto & (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \end{array} .$$

1. Rappeler l'effet sur $\mathbf{C}$ des transformations du plan suivantes :
   (a) pour $a \in \mathbf{C}$, la translation du vecteur d'affixe a ;
   (b) pour $(a,\lambda) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, l'homothétie de rapport λ et de centre d'affixe a ;
   (c) pour $(a,\theta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, la rotation d'angle θ et de centre d'affixe a ;
   (d) pour $(a,\theta) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}$, la symétrie par rapport à un axe formant un angle θ avec l'axe réel et passant par un point d'affixe a.
2. Déterminer la nature des similitudes correspondant aux applications suivantes.
   (a) $\varphi_1 : \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 3$.
   (b) $\varphi_2 : \mathbf{C} \to \mathbf{C},\ z \mapsto i\,\bar{z}$.
3. Montrer que la composée de deux symétries est une translation ou une rotation.
4. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.

<u>Exercice 4.</u>

1. Soit $v \in \mathbf{R}^2$.
   (a) Montrer qu'il existe $v^\perp \in \mathbf{R}^2$ tel que, pour tout $w \in \mathbf{R}^2$, l'on ait :
   $$\det(v,w) \;=\; \langle v^\perp, w\rangle.$$
   (b) On suppose v non nul. Montrer que $(v, v^\perp)$ est une base orthogonale.
2. Soit A, B et C des points d'affixes respectives a, b et c.
   (a) Exprimer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ à l'aide de a, b et c.
   (b) À quelle condition sur a, b et c les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ tels que soient alignés les points d'affixes z, iz et i.

Exercice 6. *Médiatrice.*

1. Soit A et B deux points distincts. On note I leur milieu, c'est-à-dire le point I tel que $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.
   Montrer que, pour tout point M, sont équivalents :
   (i) $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$;
   (ii) $\langle \overrightarrow{MI}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$.
   On appelle *médiatrice* du segment $[A, B]$ l'ensemble $\left\{ M \;\middle|\; \|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| \right\}$.
2. Soit A, B et C trois points non alignés.
   Montrer que l'intersection des médiatrices de $[A, B]$, $[B, C]$ et de $[A, C]$ est non vide.

Exercice 7. Pour les droites qui suivent, donner un de leurs points et un vecteur directeur, puis les écrire sous forme paramétrique.

1. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(1, 1)$ et de vecteur normal $(2, -3)$.
2. $\mathcal{D}_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x = 3 \right\}$.
3. $\mathcal{D}_3$ la droite d'équation $x - 4y = 8$.
4. $\mathcal{D}_4$ la droite d'équation $y = 3x + 5$.
5. $\mathcal{D}_5$ la droite passant par $(-1, 2)$ et $(3, 1)$.
6. $\mathcal{D}_6$ la médiatrice du segment reliant $(0, 2)$ et $(-1, 1)$.
7. $\mathcal{D}_7 = \left\{ M \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; \langle \overrightarrow{OM}, u \rangle = 3 \right\}$ où O est l'origine $(0, 0)$ et u le vecteur $(1, 1)$.

Exercice 8. Pour les droites qui suivent, donner un de leurs points et un vecteur normal, puis en donner une équation.

1. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(3, 7)$ et de vecteur directeur $(1, -1)$.
2. $\mathcal{D}_2 = \{ (1, 4) + t(1, 0) \mid t \in \mathbf{R} \}$.
3. $\mathcal{D}_3 = \{ (2 + 3t, 4t) \mid t \in \mathbf{R} \}$.
4. $\mathcal{D}_4$ la droite passant par $(-1, 1)$ et $(0, 1)$.
5. $\mathcal{D}_5$ la médiatrice du segment reliant $(1, 2)$ et $(-1, 0)$.

Exercice 9. Déterminer si les couples qui suivent forment des bases du plan. Lorsque ce ne sont pas des bases, écrire explicitement leur colinéarité. Lorsque ce sont des bases, calculer l'aire du parallélogramme correspondant.

1. $((0, 0), (0, 0))$.
2. $((0, 1), (1, 1))$.
3. $((2, 4), (1, 2))$.
4. $((0, 0), (1, 0))$.

Exercice 10. Soit $((a, c), (b, d)) \in (\mathbf{R}^2)^2$.

1. À quelle condition $((a, c), (b, d))$ est-elle une base ? On suppose désormais cette condition remplie.
2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Résoudre en $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ le système $\lambda\,(a, c) + \mu\,(b, d) = (x, y)$.
3. Écrire la base canonique du plan dans la base $((a, c), (b, d))$.

Exercice 11. Résoudre en $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ les systèmes qui suivent.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \\ y & = & 2 \end{array} \right.$.

2. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 1 \\ 3x + 3y & = & 2 \end{array} \right.$.

3. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y & = & 5 \\ 2x + y & = & 2 \end{array} \right.$.

4. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 5 \\ 8x + 8y & = & 20 \end{array} \right.$.

Exercice 12. On note A et B les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$. Soit $a \in \mathbf{R}$.
Déterminer en fonction de a la nature de l'ensemble

$$E \ = \ \{ \ M \mid \|AM\| = a\|BM\| \ \} \, .$$

Exercice 13. *Projection et symétrie orthogonales (droite).*
Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point A et de vecteur directeur u.
Soit M un point. On définit P par $\overrightarrow{AP} = \langle \frac{u}{\|u\|}, \overrightarrow{AM} \rangle \frac{u}{\|u\|}$.

1. Montrer que $P \in \mathcal{D}$ et que $\overrightarrow{MP} \perp u$.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}^\star$, $\|\overrightarrow{MP} + tu\| > \|\overrightarrow{MP}\|$.
3. On définit M' par $\overrightarrow{PM'} = -\overrightarrow{PM}$. Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MP}$.

Exercice 14.

1. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite du plan d'équation $y = 3x$.
   (a) Donner explicitement la projection orthogonale sur $\mathcal{D}_1$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_1$.
   (b) Calculer la distance du point $M_1 = (3, -1)$ à la droite $\mathcal{D}_1$.
2. Soit $\mathcal{D}_2$ la droite de l'espace passant par $A_2 = (1, 0, 2)$ et admettant $(1, 3, 0)$ et $(0, 1, 1)$ pour normales.
   (a) Donner explicitement la projection orthogonale sur $\mathcal{D}_2$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}_2$.
   (b) Calculer la distance du point $M_2 = (5, 3, 4)$ à la droite $\mathcal{D}_2$.

Exercice 15.

1. Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $(4, 7)$ et de rayon 3.
2. Montrer que l'ensemble
$$\mathcal{C}_2 \ = \ \big\{ \, (x, y) \ \big| \ x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0 \, \big\}$$
   est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
3. Écrire une équation de la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre $(4, 7, 1)$ et de rayon 3.
4. Montrer que l'ensemble
$$\mathcal{S}_2 \ = \ \big\{ \, (x, y, z) \ \big| \ x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 1 = 0 \, \big\}$$
   est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 16. Déterminer si les triplets qui suivent forment des bases de l'espace. Lorsque c'est la cas, calculer le volume du parallélépipède correspondant.

1. $((0,0,0),(1,2,3),(0,1,1))$.
2. $((3,0,0),(2,2,0),(1,3,4))$.
3. $((1,1,1),(2,2,2),(0,0,1))$.
4. $((3,4,1),(2,2,0),(1,0,0))$.
5. $((1,0,1),(0,2,0),(2,7,2))$.
6. $((3,4,0),(2,2,0),(1,7,1)$.

Exercice 17.

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((3,1,1),(15,5,6),(1,2,2))$ est une base.
2. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$. Résoudre en $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x+15y+z & = & a \\ x+5y+2z & = & b \\ x+6y+2z & = & c \end{array} \right. .$$

3. Écrire la base canonique dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 18. Résoudre en $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ les systèmes qui suivent. Vous donnerez la nature de l'ensemble des solutions.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+15y+z & = & 3 \\ 5y+z & = & 11 \\ 2z & = & 12 \end{array} \right. .$
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+15y+z & = & 3 \\ 5y+z & = & 11 \\ 5y+z & = & 12 \end{array} \right. .$
3. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+15y+z & = & 3 \\ 5y+z & = & 11 \\ 5y+z & = & 11 \end{array} \right. .$
4. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ x-y+z & = & 7 \\ 3x+y+3z & = & 12 \end{array} \right. .$
5. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ x-y+z & = & 7 \\ 3x+y+3z & = & 15 \end{array} \right. .$
6. $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ 2x+2y+2z & = & 8 \\ 3x+3y+3z & = & 12 \end{array} \right. .$

Exercice 19. Pour les droites et les plans qui suivent, donner une équation ou un système d'équations et les écrire sous forme paramétrique.

1. $\mathcal{P}_1$ le plan passant par $(1,1,0)$ et de vecteur normal $(0,2,-3)$.
2. $\mathcal{P}_2$ le plan passant par $(3,0,1)$ et de vecteurs directeurs $(1,-1,-1)$ et $(1,2,1)$.
3. $\mathcal{P}_3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x = 3 \right\}$.
4. $\mathcal{P}_4$ le plan d'équation $x - 4y = 8$.
5. $\mathcal{P}_5$ le plan d'équation $z = 3x - y + 5$.
6. $\mathcal{P}_6$ le plan passant par $(-1,2,0)$, $(0,1,1)$ et $(3,1,1)$.
7. $\mathcal{P}_7$ le plan médiateur du segment reliant $(0,0,2)$ et $(-4,8,4)$.
8. $\mathcal{P}_8 = \left\{ M \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \langle \overrightarrow{OM}, u \rangle = 3 \right\}$ où O est l'origine $(0,0,0)$ et u le vecteur $(1,-1,1)$.
9. $\mathcal{P}_9 = \left\{ (1,4,1) + t_1(1,0,0) + t_2(1,1,1) \;\middle|\; (t_1,t_2) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.
10. $\mathcal{P}_{10} = \left\{ (2+3t_1+t_2, 4t_1, 3-t_2) \;\middle|\; (t_1,t_2) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.
11. $\mathcal{D}_1$ la droite passant par $(3,7,1)$ et de vecteur directeur $(1,-1,-1)$.

12. $\mathcal{D}_2 = \{\,(1,0,4) + t\,(1,2,3) \mid t \in \mathbf{R}\,\}$.
13. $\mathcal{D}_3 = \{\,(2+3t, 4t, 4-t) \mid t \in \mathbf{R}\,\}$.
14. $\mathcal{D}_4$ la droite passant par $(-1,0,1)$ et $(0,0,1)$.
15. $\mathcal{D}_5$ la droite passant par $(1,0,0)$ et de vecteurs normaux $(1,0,-3)$ et $(0,1,0)$.
16. $\mathcal{D}_6 = \big\{\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\big|\; x = 3 \text{ et } y = z+2\,\big\}$.
17. $\mathcal{D}_7$ la droite d'équations $x - 4y + z = 8$, $2x + 3y - z = 0$.
18. $\mathcal{D}_8$ la droite d'équations $y = 2x + 8$, $z = 3x + 5$.

Exercice 20. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan non parallèles.
Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ s'intersectent en un unique point.

Exercice 21. *Projection et symétrie orthogonales (plan).*
Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par un point A et de vecteur normal u.
Soit M un point. On définit P par $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} - \langle \frac{u}{\|u\|}, \overrightarrow{AM}\,\rangle \frac{u}{\|u\|}$.

1. Montrer que $P \in \mathcal{P}$ et que $\overrightarrow{MP} \parallel u$.
2. Montrer que, pour tout $w \perp u$ non nul, $\|\overrightarrow{MP} + w\| > \|\overrightarrow{MP}\|$.
3. On définit M' par $\overrightarrow{PM'} = -\overrightarrow{PM}$. Montrer que $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MP}$.

Exercice 22. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y = 4$.

1. Donner explicitement la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.
2. Calculer la distance du point $M = (6,6,7)$ au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 23. *Procédé de Gram-Schmidt.* Soit $(u_1,u_2,u_3) \in (\mathbf{R}^3)^3$ une base de $\mathbf{R}^3$.
Montrer qu'il existe une base orthogonale (v_1,v_2,v_3) tel qu'il existe $(\mu_{1,2},\mu_{1,3},\mu_{2,3}) \in \mathbf{R}^3$ tel que $v_1 = u_1$, $v_2 = \mu_{1,2}u_1 + u_2$ et $v_3 = \mu_{1,3}u_1 + \mu_{2,3}u_2 + u_3$.

Exercice 24. Calculer les angles entre les objets qui suivent.

1. Les vecteurs du plan $u_1 = (0,1)$ et $v_1 = (3,-3)$.
2. Des droites du plan $\mathcal{D}_2$ et Δ_2 de vecteurs normaux $u_2 = (\sqrt{3},-1)$ et $v_2 = (3,\sqrt{3})$.
3. Une droite de l'espace $\mathcal{D}_3$ de vecteur directeur $u_3 = (1,0,0)$ et le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation $-6x + \sqrt{6}y + \sqrt{6}z = 3$.

Exercice 25. *Coordonnées cylindriques.* Soit $(r,\theta,z) \in \mathbf{R}_+^\star \times [0,2\pi] \times \mathbf{R}$.
On note $e_1 = (1,0,0)$, puis x_r l'image de e_1 par l'homothétie de rapport r et de centre $(0,0,0)$, $x_{r,\theta}$ l'image de x_r par la rotation d'angle θ et d'axe la droite passant par $(0,0,0)$ et dirigée par $(0,0,1)$, enfin $x_{r,\theta,z}$ l'image de $x_{r,\theta}$ par la translation de vecteur directeur $z(0,0,1)$.
Donner les coordonnées de $x_{r,\theta,z}$ et calculer $\|x_{r,\theta,z}\|$.

Exercice 26. *Coordonnées sphériques.* Soit $(r, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}_+^\star \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$.
On note $e_1 = (1, 0, 0)$, puis x_r l'image de e_1 par l'homothétie de rapport r et de centre $(0, 0, 0)$, $x_{r,\theta}$ l'image de x_r par la rotation d'angle θ et d'axe la droite passant par $(0, 0, 0)$ et dirigée par $(0, 0, 1)$, enfin $x_{r,\theta,\varphi}$ l'image de $x_{r,\theta}$ par la rotation d'angle φ et d'axe passant par $(0, 0, 0)$ et dirigé par $x_{r,\theta} \wedge (0, 0, 1)$. Donner les coordonnées de $x_{r,\theta,\varphi}$.

Exercice 27. Soit $\omega \in \mathbf{R}^3$ non nul.

1. Soit $u \in \mathbf{R}^3$ non colinéaire à ω. Montrer que $(\omega, \omega \wedge u, \omega \wedge (\omega \wedge u))$ est une base orthogonale.
2. Montrer que, pour tout $u \in \mathbf{R}^3$, on a :
$$u \;=\; \langle \frac{\omega}{\|\omega\|}, u \rangle \frac{\omega}{\|\omega\|} \;-\; \frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge \left(\frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge u \right).$$
3. En déduire que, pour tout $u \in \mathbf{R}^3$, on a :
$$\|u\|^2 \;=\; \left| \langle \frac{\omega}{\|\omega\|}, u \rangle \right|^2 \;+\; \left\| \frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge \left(\frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge u \right) \right\|^2.$$
4. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que, pour tout $u \in \mathbf{R}^3$,
$$u_\theta \;=\; -\cos(\theta)\, \frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge \left(\frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge u \right) \;+\; \sin(\theta)\, \frac{\omega}{\|\omega\|} \wedge u \;+\; \langle \frac{\omega}{\|\omega\|}, u \rangle \frac{\omega}{\|\omega\|}$$
est l'image de u par la rotation d'angle θ et d'axe la droite passant par l'origine $(0, 0, 0)$ et dirigée par ω. *Indication :* on pourra, pour traiter le cas u non colinéaire à ω, travailler dans une base adaptée.