Feuille d'exercices n° 8
PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto (x+1)^2\ (x+2)^3$;
2. $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \cos(x)\ \exp(\sin(x))$;
3. $f_3 : [-1,1] \to \mathbf{R},\ x \longmapsto x\ \sqrt{1-x^2}$;
4. $f_4 : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \dfrac{\mathrm{ch}\,(\ln|x|)}{x}$;
5. $f_5 :]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbf{R},\ x \longmapsto \tan x$;
6. $f_6 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \cos(x)^3 + \sin(x)^4$;
7. $f_7 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+2x+10}$;
8. $f_8 :]-5, 1[\to \mathbf{R},\ x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

Exercice 2. On définit $f :]0,+\infty[\to \mathbf{R},\ x \longmapsto \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}$.

1. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ tel que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de f.
3. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

Exercice 3.

1. Soit I un intervalle et $A : I \to \mathbf{R}$ dérivable. On pose $a = A'$.
Montrer qu'il existe $\phi : I \to \mathbf{R}_+^*$ dérivable tel que, pour tout $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable,
$$\phi\ \big(f' - af\big)\ =\ (\phi\ f)'.$$
2. Soit $a \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ dérivable. On suppose que $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ f'(t) \leq a\, f(t)$.
Montrer que $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ f(t) \leq f(0)\, e^{at}$.

Exercice 4.

1. Résoudre, en $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable, les équations qui suivent.
   (a) $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + \dfrac{t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\, f(t) = 0$;
   (b) $\forall t \in \mathbf{R},\ (1+t^2) f'(t) - 2t f(t) = (1+t^2)^2$;
   (c) pour $\alpha \in \mathbf{R}$: $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) + t f(t) = t\, e^{\alpha t^2}$;
   (d) pour $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$: $\forall t \in \mathbf{R}_+^\star,\ t\, f'(t) + \alpha\, f(t) = t^\beta$.
2. Pour la première équation, donner la solution vérifiant $f(0) = 1$.

Exercice 5.

1. Résoudre, en $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fois dérivable, les équations qui suivent.
   (a) $f'' - 4f' + 3f = 0$;
   (b) pour $c \in \mathbf{R}$: $\forall t \in \mathbf{R}$, $f''(t) + 4f(t) = e^{ct}$;
   Indication : pour trouver une solution particulière, déterminer $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \alpha e^{ct}$ soit solution de l'équation.
   (c) pour $c \in \mathbf{R}$: $\forall t \in \mathbf{R}$, $f''(t) - 4f'(t) + 4f(t) = c$;
   (d) $\forall t \in \mathbf{R}$, $f''(t) + f'(t) + f(t) = te^t$.
   Indication : chercher une solution particulière sous la forme $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto (at+b)e^t$, avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.
2. Pour la première et la dernière équation, déterminer la solution vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.