

**Feuille d'exercices n° 8**

CALCULS D'INTÉGRALES ET DE PRIMITIVES

# 1 Calculs d'intégrales et de primitives

**Exercice 8.1.** Calculer :

$$a. \int \ln x \, dx \quad b. \int \operatorname{Arctan} x \, dx \quad c. \int_0^1 (x^3 + 1)e^{-x} \, dx \quad d. \int_1^2 \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} \, dx$$

**Exercice 8.2.** Calculer :

$$a. \int x e^{1+x^2} \, dx \quad b. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \quad c. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$$

**Exercice 8.3.**

1. Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a + b - x) \, dx.$$

2. En déduire les valeurs de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan \theta) \, d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi} \, d\varphi.$$

3. Le résultat de la première question est-il vrai ou faux si l'on suppose seulement  $f$  continue par morceaux ?  
Donner une démonstration ou un contre-exemple.

**Exercice 8.4.** Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes (sauf indication expresse de l'énoncé, il n'est pas demandé d'expliciter l'intervalle sur lequel on calcule) :

$$\begin{array}{llll} a. \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx & b. \int \frac{x}{x^2-3x+2} \, dx & c. \int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} \, dx & d. \int \frac{x^4}{x^3-3x+2} \, dx \\ e. \int \frac{1}{x^2+4} \, dx & f. \int \frac{x}{x^2-4x+9} \, dx & g. \int \frac{dx}{x^3-1} & h. \int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} \, dx \\ i. \int \frac{dx}{x^{500}(x-1)} & j. \int \frac{x^5+x+1}{x^4(x-1)^3} \, dx & k. \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} & l. \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2006} \frac{dx}{x^2} \\ m. \int \frac{6x^2+2}{x^4+x^2+1} \, dx & n. \int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} \, dx & o. \int \frac{dx}{4x^2+4x+5} & p. \int \frac{5x}{x^4+1} \, dx \\ q. \int \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2} \, dx & r. \int \frac{2x+4}{x^3+5x^2+9x+5} \, dx & s. \int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)} \, dx & t. \int \frac{7}{(x+1)^7-x^7-1} \, dx \end{array}$$

**Exercice 8.5.** En utilisant le changement de variable  $t = \pi - x$ , calculer :

$$\int_0^\pi x \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

**Exercice 8.6.** Calculer :

$$\begin{aligned} a. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} \quad (\text{poser } t = e^{-x}) & \quad b. \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} \quad (\text{poser } t = \sqrt{x+1}) & \quad c. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} \quad (\text{poser } t = \sqrt{2}/x) \\ d. \int x^2 \ln(x^6 - 1) dx \quad (\text{poser } t = x^3) & \quad e. \int_0^1 \text{Arcsin} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right) dx & \quad f. \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned}$$

**Exercice 8.7.** Calculer la dérivée  $\frac{d}{d\varphi}[\ln(|\tan \varphi|)]$ . En déduire :

$$a. \int \frac{d\theta}{\sin \theta} \quad b. \int \frac{d\theta}{\cos \theta} \quad c. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

## 2 Encore des calculs d'intégrales

**Exercice 8.8.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :  $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^2 (2-x)^n e^x dx$ .

1. Calculer  $I_1$ .

2. Montrer que pour tout  $n \geq 1$  :

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1).$$

3. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ .

4. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n.$$

5. Montrer que  $\frac{2^n}{n!}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

6. En déduire que  $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}$  tend vers  $e^2$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 8.9.** Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :

$$\begin{aligned} a. \int \frac{d\theta}{\cos^2(\theta) \sin^2(\theta)} & \quad b. \int (\text{Arcsin } x)^2 dx & \quad c. \int \frac{dt}{(\text{sh } t + \text{ch } t)^n} & \quad d. \int \ln(x^2 + 2) dx \\ e. \int \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx & \quad f. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} & \quad g. \int \frac{\varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi & \quad h. \int \sqrt{\frac{t+7}{t+6}} dt \\ i. \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx & & & \end{aligned}$$