**Feuille d'exercices n° 8**

Équations différentielles

**Exercice 1.** Résoudre l'équation différentielle $(1-t)y'(t) - y(t) = t$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

**Exercice 2.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
1) $y'' + 2y' + y = xe^x$ 2) $y'' + y' - 2y = xe^x$ 3) $y'' + 2y' + 2y = (x+1)e^{-x}$

**Exercice 3.** Résoudre l'équation différentielle $xy'' + (x-2)y' - 2y = 0$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $I$, sur tout intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$. On pourra chercher une solution particulière polynomiale et une solution particulière de la forme $x \longmapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

**Exercice 4.** Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E)$ $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, d'inconnue $y : ]-\pi/2; \pi/2[ \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable.

**Exercice 5.** On considère l'équation différentielle $(E) \quad xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = xe^x$, d'inconnue $y : ]0; +\infty[ \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Résoudre $(E)$ par trois méthodes :

1. à l'aide du changement de fonction inconnue $z = e^{-x}y$,
2. à l'aide du changement de fonction inconnue $u = y' - y$,
3. en cherchant des solutions particulières de l'équation différentielle sans second membre associée à $(E)$ sous la forme $x \longmapsto x^\alpha e^x$, où $\alpha \in \mathbb{Z}$ est une constante à choisir, puis en appliquant la méthode de variation des constantes.

**Exercice 6.** Résoudre l'équation différentielle suivante $(E) : (1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, d'inconnue $y : ]-1; 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, à l'aide du changement de variable défini par $t = \arcsin(x)$.

**Exercice 7.** Méthode de Lagrange (aussi appelée méthode d'abaissement de l'ordre)
Résoudre l'équation différentielle suivante $(E) : x^2(x+1)y'' - x(x^2+4x+2)y' + (x^2+4x+2)y = 0$, d'inconnue $y : ]0; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

**Exercice 8.** Résoudre l'équation différentielle suivante $(E) : x(x^2-1)y'' - 2(x^2-1)y' + 2xy = 0$, d'inconnue $y : ]1; +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, sachant qu'il existe une solution polynômiale autre que la fonction nulle.

**Exercice 9.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère deux solutions $u$ et $v$ de l'équation différentielle $(E) : y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

1. Montrer que le Wronskien de $u$ et $v$ (noté $W$) vérifie une équation différentielle et le calculer en fonction de sa valeur en un point $a$ de $I$.
2. On suppose que $u$ ne s'annule pas sur $I$. Exprimer $W$ à l'aide d'une dérivée. Expliquer comment obtenir $v$ à l'aide de $W$ et $u$.
3. Application : On considère l'équation différentielle $x^2y'' - x(2+x)y' + (x+2)y = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.
   (a) Déterminer une solution polynômiale de $(E)$.
   (b) À l'aide du Wronskien, déterminer une deuxième solution de $(E)$ sur $I_1 = ]-\infty; 0[$ et sur $I_2 = ]0; +\infty[$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de $(E)$.

**Exercice 10.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable vérifiant $f + f'' \geq 0$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x+\pi) \geq 0$.
*Indication : faire apparaître une équation différentielle linéaire non homogène du second ordre dont $f$ est solution.*