Feuille d'exercices n° 8

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES - ETUDE LOCALE

1 Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 1. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $|a| + |b| \leq r$ il existe une unique solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ au système suivant.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5x^2y^3 = a \\ x - y + \sin(x^6y^3) = b \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image $f(\mathbb{R}^3)$, et que $f(\mathbb{R}^3)$ est un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Montrer qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tels que $\phi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exercice 4. On considère la fonction $f :]-\infty, 1[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - y^3 - 1$.
Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites, que pour tout $(x_0, y_0) \in]-\infty, 1[\times\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0, y_0) = 0$ il existe un voisinage U de x_0 et une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $\phi(x_0) = y_0$ et $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in U$.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle de degré au plus d. On le munit de la norme infinie. Soit $P_0 = c_0 + c_1X + \cdots + c_dX^d$ un polynôme de E ayant une racine $x_0 \in \mathbb{R}$ que l'on supposera simple. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que $|a_i - c_i| < r$, le polynôme $P = a_0 + \cdots + a_dX^d$ admet une unique racine simple x_P dans $]x_0 - r; x_0 + r[$ et la fonction $P \mapsto x_P$ est de classe C^1.
Remarque : avec moins de rigueur, on dira que les racines simples dépendent continûment (et même de façon C^1) des coefficients du polynôme.
Indication : On pourra définir $F : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $F(P, x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d$.

Exercice 6. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$. Déterminer la série de Taylor-Young jusqu'au degré 2 au voisinage du point $(0, 0)$.

2 Extrema

Exercice 7. On définit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2x^2 + 2$.

1. Vérifier que si D est une droite passant par $(0, 0)$, la restriction de f à D possède un maximum local à l'origine.
2. Etablir si $(0, 0)$ est un point de maximum local.

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. A l'aide des coordonnées polaires, vérifier que $f(x, y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$, où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x, y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a t-il un minimum global ?

Exercice 9. Déterminer les bornes de la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$

sur le compact $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Exercice 10. Soit $s \in \mathbb{R}_+$, et $D_s = \{(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid x_1 + ... + x_n = s\}$. Soit $f : (\mathbb{R}_+)^n \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdot ... \cdot x_n$.

1. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, trouver la valeur maximale atteinte par f dans l'ensemble D_s.
2. Déduire de la question précédente que, pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$, on a l'inégalité :

$$(x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$