Feuille d'exercices numéro 8
APPLICATIONS LINÉAIRES, MATRICES, DÉTERMINANTS

Dans tous les exercices de cette feuille, le corps des scalaires est supposé être $\mathbf{R}$.

Exercice 8.1
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Montrer les inclusions
$$\mathrm{Im}(f \circ f) \subset \mathrm{Im}(f) \text{ et } \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ f).$$
2. Montrer les équivalences
$$\mathrm{Im}(f \circ f) = \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f) \iff E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 8.2
Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, et f, g deux applications linéaires de E vers F. Montrer que
$$|\,\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Exercice 8.3
On note E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^∞. On définit ϕ et ψ, deux endomorphismes de E par les formules suivantes, pour $f \in E$
$$\phi(f) = f' \text{ et } \psi(f) = \left[x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right]$$

1. Exprimer $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$.
2. Déterminer si ϕ et ψ sont injectives et/ou surjectives.

Exercice 8.4
Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, en calculant le moins possible, que $\mathrm{Ker}\, u$ est une droite, et en donner une base a.
2. On note $b = (1,1,1)$ et $c = (1,2,0)$. Montrer que (a,b,c) est une base de $\mathbf{R}^3$ et expliciter la matrice de u dans cette base.
3. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par b et c.
   (a) On note $v : E \to \mathbf{R}^3$ la restriction de u à E. Expliciter la matrice de v de (b,c) dans (a,b,c).
   (b) Montrer que cela a un sens de considérer $w : E \to E$ la restriction de u de E vers E, et écrire la matrice de w dans la base (b,c).

Exercice 8.5
Soient les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$
Parmi les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB, lesquels ont un sens ? Calculez-les.

Exercice 8.6
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 8.7
Soit m un réel non nul. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(1+I)(A-2I)$.
2. Soit $B = \frac{1}{3}(A+I)$ et $C = \frac{1}{3}(A-2I)$. Calculer B^2 et C^2. En déduire une expression simple de B^n et C^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C.$$

Exercice 8.8
Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3, f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3, f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3.$$

1. Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E, et écrire la matrice de passage de $\underline{e}$ vers $\underline{f}$.
2. Soit $v \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{f}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{e}$?
3. Soit $w \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{e}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{f}$?

Exercice 8.9
Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.10
Calculer les déterminants de taille n suivants, en fonctions des paramètres réels $a, b, a_1, \ldots, a_n$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$