

**Feuille d'exercices n° 7**

LIMITES ET CONTINUITÉ

**Exercice 1.** Soit  $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ .

En quels points  $a \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  la fonction  $f$  peut-elle admettre une limite ?

**Exercice 2.** Étudier l'existence d'une limite de  $f$  au point  $a$  pour les données suivantes :

1.  $a = 1$  et  $f : \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$  ;
2.  $a = 0$  et  $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^2 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$  ;
3.  $a = +\infty$  et  $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$  ;
4.  $a = -\infty$  et  $f : ]-\infty, -5] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto 3 + \sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 1}$  ;
5.  $a = 0$  et  $f : ]0, \frac{\pi}{3}[ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{\sin(3x)}$  ;
6.  $a = 0$  et  $f : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$  ;
7.  $a = +\infty$  et  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \sin(x)$ .

*Indication :* on rappelle que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Exercice 3.** Soit  $T > 0$  et  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une application  $T$ -périodique.

Montrer que si  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$ , alors  $f$  est constante.

**Exercice 4.** Soit  $x_0 \in \mathbf{R}$  et  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . On suppose

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbf{N}^*, \exists x_n \in \mathbf{R}, (|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0).$$

Que peut-on en conclure ?

**Exercice 5.** Soit  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $a < b, x_0 \in ]a, b[$  et  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbf{R}$ .

On suppose que  $f$  est continue en  $x_0$  et que  $f(x_0) > 0$ .

Montrer qu'il existe un intervalle ouvert  $I \subset ]a, b[$  contenant  $x_0$  tel que  $\forall x \in I, f(x) > 0$ .

**Exercice 6.** Étudier la continuité des fonctions suivantes en tout point de leur domaine :

1.  $f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  ;
2.  $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto E(x) + E(2 - x)$  ;
3.  $f_3 : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} x E(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  ;
4.  $f_4 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbf{Q}^* \\ x & \text{sinon} \end{cases}$ .

**Exercice 7.**

1. Soit  $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ . Montrer qu'il existe au plus une application  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue telle que  $g|_{\mathbf{Q}} = f$ .
2. Soit  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  et  $L \in \mathbf{R}_+$  tels que  $(\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2, |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|)$ .  
Montrer que  $g$  est continue.
3. Soit  $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$  et  $L \in \mathbf{R}_+$  tels que  $(\forall(x, y) \in \mathbf{Q}^2, |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|)$ .
  - (a) Montrer que si  $(x_n)$  est une suite convergente, alors  $(f(x_n))$  converge.
  - (b) Montrer que si  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont deux suites convergeant vers une même limite réelle, alors  $(f(x_n))$  et  $(f(y_n))$  convergent vers une même limite.
  - (c) Montrer qu'il existe  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $g|_{\mathbf{Q}} = f$  et  $(\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2, |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|)$ .

**Exercice 8.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ . Montrer que si  $f$  est continue, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in [0, 1]^2, (|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

*Indication* : raisonner par contraposée et introduire des suites.

**Exercice 9.** Soit  $E \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$  tel que

- (i) pour tout  $x \in E$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset E$ ;
- (ii) pour tout  $x \in E^c$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset E^c$ .

1. Montrer que l'application

$$\chi_E : \mathbf{R} \longrightarrow \{0, 1\}, x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue.

2. En déduire que  $E = \emptyset$  ou  $E = \mathbf{R}$ .

**Exercice 10.** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une application continue, possédant des limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , notées respectivement  $\ell = \lim_{+\infty} f$  et  $\ell' = \lim_{-\infty} f$ .

1. Montrer que  $f$  est bornée.
2. On suppose qu'il existe  $x_0$  tel que  $f(x_0) > \max(\{\ell, \ell'\})$ .
  - (a) Montrer qu'il existe  $R \in \mathbf{R}_+^*$  tel que

$$\sup_{\mathbf{R}} f = \sup_{[x_0 - R, x_0 + R]} f.$$

- (b) En déduire que  $f$  atteint sa borne supérieure.

**Exercice 11.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une application continue.

1. Montrer que, si  $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ , alors  $f$  possède un point fixe.
2. Faire de même en supposant cette fois que  $[0, 1] \subset f([0, 1])$ .

**Exercice 12.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application continue possédant un unique point fixe  $x_*$ . Soit une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  convergeant vers 0 et  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in [0, 1]^{\mathbf{N}}$  une suite telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_n = f(x_n) + \varepsilon_n.$$

1. Montrer que toute sous-suite convergente de  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $x_*$ .
2. On raisonne par l'absurde et l'on suppose que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ne converge pas vers  $x_*$ .
  - (a) Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  et une sous-suite  $(x_{n(k)})_{k \in \mathbf{N}}$  tels que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad |x_{n(k)} - x_*| \geq \varepsilon.$$

- (b) Aboutir à une contradiction.

**Exercice 13.** Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des applications  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continues qui vérifient la condition

$$(*) : \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) f(y).$$

Soit  $f$  vérifiant (\*).

1. Montrer que :  $\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$ .
2. Quelles sont les valeurs possibles pour  $f(0)$  ?
3. On suppose qu'il existe  $x_0 \in \mathbf{R}$  tel que  $f(x_0) = 0$ . Que peut-on dire de  $f$  ?  
On suppose désormais que  $f$  ne s'annule pas.
4. Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$  tel que pour tout  $n \in \mathbf{N}, f(n) = \alpha^n$ .
5. Montrer que :  $\forall k \in \mathbf{Z}, f(k) = \alpha^k$ .
6. Montrer que :  $\forall r \in \mathbf{Q}, f(r) = \alpha^r$ .
7. Conclure.