Ex 2 TD 7 (sur $\mathbb{C}$)

1) $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad P_A = \det\begin{pmatrix} X-7 & 10 \\ -2 & X+1 \end{pmatrix} = (X-7)(X+1) + 20$

$= X^2 - 6X - 7 + 20$

$= X^2 - 6X + 13$

$\Delta = 36 - 52 = -16 = (4i)^2$

$\lambda_1 = \frac{6-4i}{2} = 3 - 2i \qquad \lambda_2 = 3 + 2i$

A diagonalisable donc $m_A = P_A = (X - (3-2i))(X - (3+2i))$

- $\frac{1}{m_A} = \frac{\alpha}{X-3+2i} + \frac{\beta}{X-3-2i} \longleftarrow \alpha, \beta = ?$

- $X - (3-2i) = X - 3 + 2i = \underbrace{X - 3 - 2i} + 4i$

Donc $1 = \frac{1}{4i}(X - (3-2i)) - \frac{1}{4i}(X - (3+2i))$

$1 = -\frac{i}{4}(X - (3-2i)) + \frac{i}{4}(X - (3+2i))$

$\Pi_1 = \frac{i}{4}(A - (3+2i) I_2)$ et $\Pi_2 = -\frac{i}{4}(A - (3-2i) I_2)$

- Décomposition de Dunford : $A = ((3-2i)\Pi_1 + (3+2i)\Pi_2) + 0$

- $A^k = \lambda_1^k \Pi_1 + \lambda_2^k \Pi_2 = (3-2i)^k \Pi_1 + (3+2i)^k \Pi_2$

- $\exp(tA) = e^{t\lambda_1}\Pi_1 + e^{t\lambda_2}\Pi_2$

---

2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

- $rg(B) = 1$ donc $\ker(u) \neq \{0\}$ donc $0 \in Spec(B)$
- $tr(B) = -3 + 3 = 0$

$ \overset{\shortparallel}{0 + ?}$ donc 0 est l'unique valeur propre.

donc $P_B = X^2$.

$rg(B) = 1$ donc $\dim E_0 = \dim(\ker B) = 1 \neq 2 = m_0$

donc B non-diag. donc m_B non-scindé à racines simples

et donc $m_B = X^2$

Ici $M_{2\times1}(\mathbb{C}) = F_0 \qquad \Pi_0 : M_{2\times1}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{2\times1}(\mathbb{C}) \qquad \Pi_0 = I_2$

$X \longmapsto X$

Dunford.

$$B = \underbrace{0 \times \Pi_0}_{\text{la partie diagonalisable}} + \underbrace{B}_{\text{la partie nilpotente}}$$

• $B^k = \begin{cases} B & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$

($B^2 = 0$, B est nilpotente d'indice 2 car $B^1 \neq 0$)

$$B = D + N$$
$$B^k = (D+N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j N^{k-j}$$

• $e^{tB} = I_2 + \frac{(tB)}{1} + \underbrace{\frac{(tB)^2}{2!} + \frac{(tB)^3}{3!} + \cdots}_{=0 \text{ car } B^2 = 0}$

$= I_2 + tB.$

3) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C - 1I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de rg 1

donc $1 \in Spec(C)$. De plus $\dim(E_1) = 2$ donc $m_1 \geq 2$

De plus $tr(C) = 6$
$= 1 + 1 + 4$ donc $Spec(C) = \{1, 4\}$ avec $m_1 = 2$ et $m_4 = 1$

$P_C = (X-1)^2(X-4)$

$m_C \in \{(X-1)(X-4), (X-1)^2(X-4)\}$

On a $\dim E_1 = 2 = m_1$ (et $\dim E_4 = 1 = m_4$)
donc C est diagonalisable donc m_C est scindé à racines simples
donc $m_C = (X-1)(X-4)$

Rem $rg(\Pi_4) = 1 = \dim F_4 = m_4$
$rg(\Pi_1) = 2 = \dim F_1 = m_1$

• $\frac{1}{(X-1)(X-4)} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X-4}$

• $X - 1 = X - 4 + 3$ donc $1 = \frac{1}{3}(X-1) - \frac{1}{3}(X-4)$

Donc $\Pi_1 = -\frac{1}{3}\underbrace{(C - 4I_3)}_{= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$ et $\Pi_4 = \frac{1}{3}(C - I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 2 TD 7 suite

3) Dunford $\quad C = \underbrace{(1\Pi_1 + 4\Pi_4)}_{\text{diagonalisable}} + \underbrace{0}_{\text{nilpotente}}$

$$C^k = (1\Pi_1 + 4\Pi_4)^4 = 1^k\Pi_1 + 4^k\Pi_4$$

$$e^{tC} = e^{t\times 1}\Pi_1 + e^{t4}\Pi_4$$

4) $E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_E = \begin{vmatrix} X-5 & -1 & -3 \\ -4 & X-3 & -4 \\ 1 & -1 & X-1 \end{vmatrix}$

Ex 2, 6, 7, 10, 12, 14 Fiche 7

Ex 2

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_E = \begin{vmatrix} X-5 & -1 & -3 \\ -4 & X-3 & -4 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -3 \\ 0 & X-3 & -4 \\ 2-X & 1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$E-2I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{C_1 \leftarrow C_1 - C_3} \qquad = (X-2) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & X-3 & -4 \\ -1 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$P_E = \det(X I_3 - E) \leftarrow C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ et $X = 2$

$P_E(2) = \det(2I - E)$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} (X-2) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & X-3 & -4 \\ 0 & 0 & X-4 \end{vmatrix} = (X-2)(X-3)(X-4)$$

P_E est scindé à racines simples donc E diagonalisable donc $m_E = P_E$

$$\frac{1}{m_E} = \frac{1}{(X-2)(X-3)(X-4)} = \frac{\alpha}{X-2} + \frac{\beta}{X-3} + \frac{\gamma}{X-4}$$

- $\dfrac{1}{(X-3)(X-4)} = \alpha + (X-2)\left(\dfrac{\alpha}{X-3} + \dfrac{\gamma}{X-4}\right)$

  en $X = 2$: $\alpha = \frac{1}{2}$
- $\dfrac{1}{(X-2)(X-4)} = \beta + (X-3) \times (\;—\;)$ en $X = 3$: $\beta = -1$
- $\dfrac{1}{(X-2)(X-3)} = \gamma + (X-4)(\;—\;)$ en $X = 4$: $\gamma = \frac{1}{2}$

d'où $\dfrac{1}{m_E} = \dfrac{1}{2(X-2)} - \dfrac{1}{X-3} + \dfrac{1}{2(X-4)}$

$$1 = \frac{1}{2}(X-3)(X-4) - (X-2)(X-4) + \frac{1}{2}(X-2)(X-3)$$

D'où $\Pi_2 = \frac{1}{2}(E-3I)(E-4I)$; $\Pi_3 = -(E-2I)(E-4I)$; $\Pi_4 = \frac{1}{2}(E-2I)(E-3I)$

Ex 2 (suite) Fiche 7

Dunford : $E = (2\Pi_2 + 3\Pi_3 + 4\Pi_4) + 0$ ← nilpotente

$E^k = 2^k \Pi_2 + 3^k \Pi_3 + 4^k \Pi_4$ ← calculs à faire

$\exp(tE) = e^{2t}\Pi_2 + e^{3t}\Pi_3 + e^{4t}\Pi_4$

$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$F - 1I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2$ donnerait $C_1 = 0$

$$P_F = \det \begin{vmatrix} X+1 & -1 & -3 \\ 2 & X-2 & -2 \\ 2 & -1 & X-4 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -3 \\ 2X-2 & X-2 & -2 \\ 0 & -1 & X-4 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & X-2 & -2 \\ 0 & -1 & X-4 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{=} (X-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & X & 4 \\ 0 & -1 & X-4 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1) \times \begin{vmatrix} X & 4 \\ -1 & X-4 \end{vmatrix} = (X-1)\big(X(X-4)+4\big)$$
$$= (X-1)(X^2 - 4X + 4) = (X-1)(X-2)^2$$

Calcul de m_F :

Variante 1 : $m_F \in \{(X-1)(X-2), (X-1)(X-2)^2\}$

$(F - 1I)(F - 2I)$ est nul ou non. Si oui alors $m_F = (X-1)(X-2)$ et sinon $m_F = (X-1)(X-2)^2$

Variante 2 : $(\dim E_1 = m_1)$ et $\dim E_2 \overset{?}{=} m_2$

$E_2 = \ker(F - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ← de rang 2 donc $\dim E_2 = 1 \neq 2 = m_2$

F non diagonalisable donc $m_F = (X-1)(X-2)^2 = P_F$

Ex 2 (fin) Fiche 7

- $\dfrac{1}{m_F} = \dfrac{\alpha X+\beta}{(X-2)^2} + \dfrac{\gamma}{X-1}$ ← en exo

- $(X-2)^2 = \big((X-1)-1\big)^2 = (X-1)^2 - 2(X-1) + 1 = (X-1)(X-3)+1$

d'où $1 = -(X-3)(X-1) + (X-2)^2$

- $\Pi_1 = (F-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(dc $rg(\Pi_1) = \dim(F_1) = 1 = m_1$)

- $\Pi_2 = -(F-3I)(F-I) = -\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

($rg(\Pi_2) = \dim F_2 = 2 = m_2$)

Dunford : Posons $D = 1\,\Pi_1 + 2\,\Pi_2$ et $N = F - D$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $F^k = (D+N)^k = D^k + kD^{k-1}N + \cancel{\binom{k}{2}D^{k-2}N^2} + \cdots$

or $D^k = 1^k\,\Pi_1 + 2^k\,\Pi_2$ (en exo)

$F^k = (\Pi_1 + 2^k\Pi_2) + k\,(\Pi_1 + 2^{k-1}\Pi_2)N$

$= \Pi_1(I + kN) + \Pi_2(2^k I + 2^{k-1}N)$ en exo

- $\exp(tF) = e^{tD+tN} = e^{tD}e^{tN} = (e^t\,\Pi_1 + e^{2t}\,\Pi_2)\left(I + tN + \cancel{\dfrac{(tN)^2}{2!}} + \cancel{\dfrac{(tN)^3}{3!}} + \cdots\right)$

(exo)

Ex 6 Fiche 7

Résoudre : $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = 2 z_{n-1} \end{cases}$ $(*)$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

$(x_n), (y_n), (z_n)$ sont sol. de $(*)$ $\Longleftrightarrow (X_n)$ est sol. $X_n = A \cdot X_{n-1}$ $(**)$

$$P_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)^2 (X-2)$$

$E_1 = \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de rang 1 donc $\dim E_1 = 2 = m_1$

donc A est diagonalisable et donc $m_A = (X-1)(X-2)$

Variante 1. Base de E_1 et de E_2 puis $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tq $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ensuite $A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$

Variante 2 $X - 1 = X - 2 + 1$ donc $1 = X - 1 - (X-2)$

d'où $\Pi_1 = -(A - 2I) = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Pi_2 = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Dunford $A = (1 \Pi_1 + 2 \Pi_2) + 0$)

La solution (générale) de $(**)$ est $X_n = A^n \cdot X_0$ où $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

où $A^n = 1^n \Pi_1 + 2^n \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

on a : $\forall n \geq 0$ $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + (2^n - 1) z_0 \\ y_0 + (2^n - 1) z_0 \\ 2^n z_0 \end{pmatrix}$

Ex 7 fiche 7

1) $u_0 = u_1 = 1$ et pour $n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$

But A ? tq $X_n = A X_{n-1}$ pour $n \geq 2$

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$P_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)X - 1 = X^2 - X - 1$$

$\Delta = 1 + 4 = 5$ Deux val. propres $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

P_A scindé à racines simples donc A diagonalisable. $m_A = P_A$.

$$P_A = m_A = \left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$X - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = X - \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = X - \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5}$$

donc $1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(X - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(X - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$\Pi_1 = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(A - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} I_2\right)$ et $\Pi_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left(A - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} I_2\right)$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \qquad = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

(Dunford $A = (\lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2) + 0$)

$$A^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right)$$

en exo $X_n = A^{n-1} \times X_1 = A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$ d'où $u_n = \dots$

$\dim(E_0 + E_4) = \underbrace{\dim(E_0)}_{=3} + \dim(E_4) \leq 4$

donc $\dim(E_4) \leq 1$ donc $\dim E_4 = 1$

On a bien : $E_0 \oplus E_4 = \mathbb{R}^4$

$E_4 = \mathrm{Vect}\{e_1+e_2+e_3+e_4\}$

Finalement on a la base $\mathcal{B}'$: e_1-e_2, e_1-e_3, e_1-e_4, $e_1+e_2+e_3+e_4$ qui est formée de vecteurs propres.

et $M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 4 \end{pmatrix}$

Ex 7

1) Soit u un end. tq $\mathrm{Spec}(u) = \{\lambda\}$. (en dim finie)

On suppose u diagonalisable : $\exists \mathcal{B}$ base de E tq $M_{\mathcal{B}}(u) = \alpha \cdot I_n$.

Alors $P_u = P_{M_{\mathcal{B}}(u)} = \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha)$ or λ est racine de P_u

donc $\alpha = \lambda$ et donc $M_{\mathcal{B}}(u) = \lambda \cdot I_n$ et $u = \lambda\, Id_E$

2) . $P_C = (X-1)^3$ donc $\mathrm{Spec}(C) = \{1\}$

Par 1), C est diagonalisable $\Leftrightarrow C = 1 \cdot I_3$

donc C n'est pas diagonalisable.

. $P_D = (X-1)(X-4)(X-6)$ scindé à racines simples

et D est diagonalisable

3) Soit $T \in M_n(\mathbb{K})$ triang. supérieure

Mq T est diagonalisable $\Leftrightarrow T$ est diagonale

$\Leftarrow$: trivial

$\Rightarrow$: Soit u l'end. de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base can. est T. $P_T = P_u = (X-\lambda)^n$ où λ est l'unique élément diag.

Par 1) $u = \lambda\, Id_{\mathbb{K}^n}$ et $T = \lambda \cdot I_n$

Ex 10 TD7

$$(*)\begin{cases} x'(t) = -3\,x(t) + 9\,y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3\,y(t) \end{cases} \quad \text{avec } x(0)=1,\ y(0)=2$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

x, y sont sol. de $(*) \iff X' = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X$ et $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- $rg(A) = 1$ donc $E_0 = \ker(A)$ est de dim 1

donc $0 \in Spec(A)$

De plus $tr(A) = -3+3 = 0 = 0 + 0$

Finalement $Spec(A) = \{0\}$. $(P_A = X^2)$

$\dim E_0 = 1 \neq 2 = m_0$ donc A non-diagonalisable donc $m_A = X^2$

Ici l'esp. caract. $F_0 = \ker((A - 0 \cdot I)^2) = \ker(0) = M_{2\times1}(\mathbb{R})$

et $\Pi_0 = I_2$

<u>Dunford</u> : $A = \overbrace{\underbrace{(0 \times \Pi_0)}_{\sum \lambda_i \Pi_i}}^{\text{diagonalisable}} + \overbrace{(\ A\ )}^{\text{nilpotente}}$

$A^1 \neq 0$ et $A^2 = 0$ donc 2 est l'indice de nilpotence de A.

La solution de $(*)$ est : $X(t) = e^{tA} \cdot X_0$ où $X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = I_2 + tA + \cancel{\frac{(tA)^2}{2!}} + \cancel{\cdots} = I_2 + t\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-3t & 9t \\ -t & 1+3t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 9t \\ -t & 1+3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+15t \\ 2+5t \end{pmatrix}$$

Ex 14 TD 7

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y''(t) = -x(t) - y(t) + y'(t) \end{cases} \quad (*)$$

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

x, y sol de $(*) \iff X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$

Ex 12 TD 7 $\quad y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (*)$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

$X' = \begin{pmatrix} y'' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix}}_{X} \iff y$ sol de $(*)$.

$P_A = \begin{vmatrix} X-5 & 6 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-5)X + 6 = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$

A diag. (car P_A scindé à racines simples)

$X - 2 = X - 3 + 1 \quad$ donc $\quad 1 = (X-2) - (X-3)$

$\Pi_2 = -(A - 3I) = -\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

et $\Pi_3 = A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3e^{3t} - 2e^{2t} & -6e^{3t} + 6e^{2t} \\ e^{3t} - e^{2t} & 3e^{2t} - 2e^{3t} \end{pmatrix}}$$

$e^{tA} = e^{2t}\Pi_2 + e^{3t}\Pi_3 = \begin{pmatrix} -2e^{2t} & 6e^{2t} \\ -e^{2t} & 3e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{3t} & -6e^{3t} \\ e^{3t} & -2e^{3t} \end{pmatrix}$

$X(t) = \left(\quad \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Ex 3 $\quad A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$

1) $m_A = ?$

- $A-(a-b)I = \begin{pmatrix} b & \cdots & b \\ \vdots & & \vdots \\ b & \cdots & b \end{pmatrix}$ est de rang 1 et $\dim(\ker(A-(a-b)I)) = n-1$

donc $a-b \in \mathrm{Spec}(A)$ et $m_{a-b} \geq n-1$

- $\mathrm{tr}(A) = na = (n-1)(a-b) + ?$

$? = na-(n-1)(a-b) = na-(n-1)a+(n-1)b = a+(n-1)b$

On a éventuellement deux val. propres : $a-b$, $a+(n-1)b$

sauf égalités (auquel cas on aura une seule val. propre)

- on résout : $a-b = a+(n-1)b$

$0 = nb$ or $n \geq 2$

donc $b=0$

* Cas 1 : $b=0$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} = aI_n$,

le reste de l'ex. est facile.

* Cas 2 : $b \neq 0$. $\mathrm{Spec}(A) = \{a-b, \overbrace{a+(n-1)b}^{\text{de mult. } 1.}\}$

de multiplicité $n-1$

1) $\dim E_{a-b} = n-1 = m_{a-b}$ donc A diag. donc $m_A = (X-(a-b))(X-(a+(n-1)b))$

2) $$E_{a-b} = \ker \begin{pmatrix} b & \cdots & b \\ \vdots & & \vdots \\ b & \cdots & b \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\end{pmatrix}}_{} \Bigg\}$$

($n-1$ vecteurs libres dans E_{a-b} de dim $n-1$)

$$E_{a+(n-1)b} = \ker \begin{pmatrix} (1-n)b & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & (1-n)b \end{pmatrix} \longleftarrow C_1 + \cdots + C_n = 0$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \right\} \qquad \left(\dim E_{a+(n-1)b} = 1 \text{ car } m_{a+(n-1)b} = 1 \right)$$

$$\text{Soit } P = \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 & & & & b_n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ \\ \\ \\ e_n \end{matrix} \quad \text{On a } P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} a-b & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a-b & \\ 0 & & & a+(n-1)b \end{bmatrix}$$

3) A inversible $\iff \det(A) \neq 0 \iff (a-b)^n(a+(n-1)b) \neq 0$
$$\iff \begin{cases} a \neq b \\ \text{et } a + (n-1)b \neq 0 \end{cases}$$

Idée Trouver P^{-1} : $\begin{cases} b_1 = e_1 - e_2 \\ b_2 = e_1 - e_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} = e_1 - e_n \\ b_n = e_1 + \cdots + e_n \end{cases}$

La somme ; $b_1 + \cdots + b_n = n e_1$

d'où $e_1 = \frac{1}{n}(b_1 + \cdots + b_n)$

d'où $e_2 = e_1 - b_1 = \frac{1}{n}\left((n-1)b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right)$

$$P^{-1} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & n-1 & & \\ \vdots & 1 & \text{etc} & \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 1 & & \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

$\rightarrow$ Variante : Inverser A directement $\begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & & b_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a & \cdots & b \\ b & \ddots & b \\ b & \cdots b & a \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ \\ e_n \end{matrix}$

Ex 3 fin

4) $A^k = ?$

$A = P D^k P^{-1}$

Variante Calculer Π_{a-b} et $\Pi_{a+(n-1)b}$

$A^k = (a-b)^k \Pi_{a-b} + (a+(n-1)b)^k \Pi_{a+(n-1)b}$

5) $A = PDP^{-1}$

$\hookrightarrow e^{tA} = P e^{tD} P^{-1}$ et $e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{t(a-b)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & e^{t(a-b)} & \\ 0 & & & e^{t(a+(n-1)b)} \end{bmatrix}$