Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016

Maths III PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 7

INVERSION LOCALE ET GLOBALE – THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES – EXTREMA

I. Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 1. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $|a| + |b| \leq r$ il existe une unique solution locale $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ au système suivant.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5x^2y^3 = a \\ x - y + \sin(x^6y^3) = b \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image $f(\mathbb{R}^3)$, et que $f(\mathbb{R}^3)$ est un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$.

1. Montrer qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tels que $\phi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.
2. On note $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ où $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont les composantes de ϕ. Calculer $\phi_1'(x_0)$ et $\phi_2'(x_0)$.

Exercice 4. On considère la fonction $f :]-\infty, 1[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - y^3 - 1$.
Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites, que pour tout $(x_0, y_0) \in]-\infty, 1[\times\mathbb{R}$ vérifiant $f(x_0, y_0) = 0$ il existe un voisinage U de x_0 et une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant $\phi(x_0) = y_0$ et $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in U$.

Exercice 5. Soit $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (xy - z, x^2 + y + xe^z) \end{array}$, aussi notée (F_1, F_2) avec $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
On considère sa courbe de niveau $N_F(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = (0, 0)\}$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que le théorème des fonctions implicites s'applique en tout point de $N_F(0)$.
3. En déduire que $N_F(0)$ est le graphe d'une unique fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$.
   On pourra pour cela admettre que pour tout réel x_0 fixé, il existe $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0, y_0, z_0) \in N_F(0)$.
4. Déterminer la matrice Jacobienne $J_\varphi(x)$ de φ en tout point $x \in \mathbb{R}$. On donnera en particulier la matrice $J_\varphi(0)$ (avec les valeurs explicites de $\varphi_1(0)$ et $\varphi_2(0)$).

Exercice 6. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto x^3 - 2xy + 2y^2 - 1$. Trouver la pente de la droite tangente à la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ au point $(1, 1)$. Préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point.

Exercice 7. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \mapsto x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3$, ainsi que sa surface de niveau 0 dans $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent à cette surface au point $(1, 1, 1)$.
2. Vérifier qu'au voisinage du point $(1, 1, 1)$ cette surface est le graphe d'une fonction $z = g(x, y)$.
3. Écrire le pôlynome de Taylor d'ordre deux de g au point $(1, 1)$. Quelle est la matrice hessienne de g en ce point ?
4. Quelle est la position de la surface par rapport au plan tangent ?

II. Extrema

Exercice 8. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$. Justifier l'existence et déterminer le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au voisinage du point $(0, 0)$.

Exercice 9. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2x^2 + 2$.

1. Vérifier que si D est une droite passant par $(0, 0)$, la restriction de f à D possède un maximum local à l'origine.
2. Etablir si $(0, 0)$ est un point de maximum local.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. A l'aide des coordonnées polaires, vérifier que $f(x, y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$, où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x, y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a t-il un minimum global ?

Exercice 11. Déterminer les bornes de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$

sur le compact $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Exercice 12. Étudier les extrema des fonctions suivantes :

1. $f : (x, y) \longmapsto x + 2y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 5$,
2. $f : (x, y, z) \longmapsto (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
3. $f : (x, y, z) \longmapsto xyz$ sous les contraintes $x + y + z = 1$ et $y - z = 1$.

Exercice 13. Soit $s \in \mathbb{R}_+$, et $D_s = \{(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mid x_1 + ... + x_n = s\}$. Soit $f : (\mathbb{R}_+)^n \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdot ... \cdot x_n$.

1. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, trouver la valeur maximale atteinte par f dans l'ensemble D_s.
2. Déduire de la question précédente que, pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$, on a l'inégalité :

$$(x_1 \cdot ... \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$