Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Cursus préparatoire, 1ère année 2ème semestre : Analyse

Feuille d'exercices 7

INTÉGRATION

---

1 Fonctions en escalier et intégrabilité

Exercice 8.1.

1. Montrer que le produit de deux fonctions en escalier sur un intervalle I est une fonction en escalier sur I.
2. La composée de deux fonctions en escalier sur un intervalle I est-elle toujours une fonction en escalier sur I ?

Exercice 8.2. 1. Montrer que si f est une fonction bornée, intégrable et paire sur l'intervalle $[-a, a]$, alors
$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$,

2. Montrer que si f est une fonction bornée, intégrable et impaire sur l'intervalle $[-a, a]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Exercice 8.3. Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. On sait que f intégrable sur $[a, b] \Rightarrow |f|$ intégrable sur $[a, b]$. Est-ce que la réciproque est également vraie ?

2 Manipulations simples sur les intégrales définies

Exercice 8.4. Prouver l'énoncé suivant :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, à valeurs positives, telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, alors f est nulle sur $[a; b]$.

Exercice 8.5. Soit f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Montrer que f est de signe constant si et seulement si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt = \left|\int_a^b f(t)\,dt\right|$.

Exercice 8.6. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que, lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, $\displaystyle\frac{1}{x^2}\int_0^x t f(t)\,dt$ tend vers $\displaystyle\frac{1}{2}f(0)$.

Exercice 8.7. 1. Montrer que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2. Montrer que $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.8. Donner une expression raisonnablement simple des dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t} dt \qquad\qquad g(x) = \int_0^{x^2} \left(\mathrm{Arctan}(t+x)\right)^7 dt.$$

Exercice 8.9.

1. Calculer $I = \int_0^1 \ln(1+t^2)dt$.
2. Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = \int_0^1 \sqrt[n]{1+t^2}dt$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
3. (a) A l'aide du développement de Taylor-Lagrange, déduire l'inégalité : $|e^u - 1 - u| \leq \frac{1}{2}u^2e^u$.

   (b) En déduire que pour tout $t \in [0,1]$, on a $\left|\sqrt[n]{1+t^2} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+t^2)\right| \leq \frac{1}{n^2}$, puis fournir une suite $(v_n)_n$ très simple telle que $\frac{u_n - 1}{v_n} \longrightarrow 1$ quand $n \to +\infty$.