

**Feuille d'exercices n° 7**

CALCUL DIFFÉRENTIEL

**Exercice 1.** On considère l'application  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = M^2$ . Montrer que  $f$  est différentiable sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et déterminer sa différentielle en tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 2.** Pour les fonctions suivantes, déterminer les points  $a$  en lesquels la fonction est différentiable et déterminer sa différentielle en un tel point :

1.  $f_1 : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_1(x) = \frac{1}{x}$ ,
2.  $f_2 : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f_2(z) = \frac{1}{z}$ ,
3.  $f_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f_3(z) = \operatorname{Re}(z)$ .

(avec  $\mathbb{C}$  considéré comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel)

**Exercice 3.** Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels réels de dimensions finies. On considère une application  $\varphi : E \times F \rightarrow G$  bilinéaire. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  (resp.  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ ) une base de  $E$  (resp.  $F$ ). On sait que l'on peut munir respectivement  $E$  et  $F$  des normes  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$  définies par

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, y = \sum_{j=1}^p y_j f_j \in F, \quad \|x\|_E = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_i| \text{ et } \|y\|_F = \max_{j \in \llbracket 1; p \rrbracket} |y_j|.$$

1. Munissons  $E \times F$  de la norme produit associée aux deux normes précédentes, notée  $\|\cdot\|$ . Montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}^+$  tel que :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \|\varphi(x, y)\|_G \leq C \|(x, y)\|^2.$$

2. Montrer que  $\varphi$  est différentiable en tout point  $(x, y) \in E \times F$  et que

$$\begin{aligned} d\varphi(x, y) : E \times F &\longrightarrow G \\ (h, k) &\longmapsto \varphi(x, k) + \varphi(h, y). \end{aligned}$$

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Montrer que  $f$  admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en  $(0, 0)$  mais n'y est pas différentiable.

**Exercice 5.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 y - y^3}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

1. Justifier l'existence et calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(0, 0)$ .
2. L'application est-elle différentiable en  $(0, 0)$  ?

**Exercice 6.** Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés et  $f : E \rightarrow F$  une fonction différentiable. Dans les cas suivants trouver le nombre de lignes et de colonnes de la matrice jacobienne de  $f$  en un point, puis à l'aide des entrées de la matrice jacobienne décrire la différentielle de  $f$  en un point donné :

1.  $f$  est une fonction réelle d'une variable réelle ( $E = F = \mathbb{R}$ ),
2.  $f$  est une fonction vectorielle d'une variable réelle ( $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}^p$ ),
3.  $f$  est une fonction numérique (réelle) d'une variable vectorielle ( $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$ ), Quel est le lien avec le gradient de  $f$  dans ce cas là ?
4.  $f$  est une fonction vectorielle d'une variable vectorielle ( $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^p$ .)

**Exercice 7.** On considère l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$ .
2. Montrer que  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  en  $(0, 0)$ .

**Exercice 8.** Notons  $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , où  $E_{i,j}$  désignent les matrices élémentaires. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \det : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$

1. Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles premières dans la base  $\mathcal{B}_c$  et les calculer.
2. Justifier que  $\det$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et déterminer sa différentielle en toute matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 9.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que l'application  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que  $f$  possède des dérivées partielles premières en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .
3. Déterminer les points de  $\mathbb{R}^2$  où les dérivées partielles premières de  $f$  sont continues.
4. Justifier que  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  et écrire la différentielle de  $f$  en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 10.**

1. Si  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  est différentiable de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , déterminer la dérivée de  $u : x \mapsto f(x, -x)$  et la différentielle en tout point de  $g : (x, y) \mapsto f(y, x)$ .
2. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces normés,  $U$  un ouvert de  $E$ , et  $f : E \rightarrow F$  différentiable. Pour  $a \in U$  et  $v \in E$  dériver la fonction composée  $t \mapsto f(a + tv)$  en  $t = 0$ .

**Exercice 11.** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions différentiables. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x + g(x, y)) \end{aligned}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en chaque point de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 12.** On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \int_0^{e^{xy}} \sin(t^2) dt.$$

En considérant  $f$  comme la composée de deux applications, montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , puis écrire sa matrice jacobienne en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 13.** Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimensions finies,  $f : E \rightarrow F$  et  $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$  différentiables. En la considérant comme la composée de deux applications, montrer que l'application produit  $\lambda f$  est aussi différentiable et déterminer sa différentielle en tout point de  $E$ .

**Exercice 14.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  à valeurs non nulles. Montrer que l'application inverse  $\frac{1}{f}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  et donner sa différentielle en tout point de  $U$ .