Feuille d'exercices n° 6
Réels et suites

Exercice 1. Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$.

1. Montrer que $\emptyset$ ne possède pas de borne supérieure.
2. On note $-A = \{ -a \,|\, a \in A \}$.
   (a) Montrer que $\inf A$ existe si et seulement si $\sup -A$ existe et que dans ce cas $\inf A = -\sup -A$.
   (b) Montrer que $\sup A$ existe si et seulement si $\inf -A$ existe et que dans ce cas $\sup A = -\inf -A$.
3. Soit $B \subset A$ non vide.
   (a) On suppose A majoré. Montrer que B possède une borne supérieure et que $\sup B \leq \sup A$.
   (b) On suppose A minoré. Montrer que B possède une borne inférieure et que $\inf B \geq \inf A$.

Exercice 2. Déterminer pour les ensembles qui suivent s'ils possèdent des bornes supérieure et inférieure. Le cas échéant, donner ces bornes et décider si ce sont également des extrema.

1. $[0, 1[$
2. $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}^\star \right\}$
3. $\left\{ \frac{m}{mn+1} \,\middle|\, (m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^\star \right\}$
4. $\left[0, \sqrt{2}\right] \cap \mathbf{Q}$

Exercice 3.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{Z}$.
   Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.
2. Soit $D \subset \mathbf{Z}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que D possède un plus grand élément.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell > 0$.
Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $N \geq N_0 \Longrightarrow u_n \geq \frac{\ell}{2}$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite complexe bornée et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbf{C}$.

1. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $(u_n\, v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
2. Qu'en est-il si $\ell \neq 0$?

Exercice 6. *Suites arithmético-géométriques.*
Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et $u^{(0)} \in \mathbf{R}$. On définit par récurrence $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que : $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} = (u_n - \alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. Étudier la convergence de (u_n). Indication : on distinguera les cas $|a| < 1$, $|a| > 1$ et $a = -1$.
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 7. Soit $\mu \in \mathbf{R}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels distincts a et b tels que $(u_n^a)_{n\in\mathbf{N}} = (a^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_n^b)_{n\in\mathbf{N}} = (b^n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_{n+2} = -2\mu\ u_{n+1} - \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right) u_n\ .$$
2. Montrer que, pour tout $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$, il existe $(\lambda_a, \lambda_b) \in \mathbf{R}^2$ tel que
$$u_0 = \lambda_a\ u_0^a + \lambda_b\ u_0^b \qquad \text{et} \qquad u_1 = \lambda_a\ u_1^a + \lambda_b\ u_1^b\ .$$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = -2\mu\ u_{n+1} - \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right) u_n$.
   (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n à l'aide de (u_0, u_1, a, b, n).
   (b) Étudier la convergence de (u_n).

Exercice 8.

1. Soit $(a, b) \in (\mathbf{R}_+^\star)^2$. Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbf{R}$ tel que
$$18ab - 3ac - bc \ = \ 0$$
et que, de plus, $c > 0$.
2. Il existe donc une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{R}_+^\star)^{\mathbf{N}}$ vérifiant : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$18u_n u_{n+1} - 3u_n u_{n+2} - u_{n+1}u_{n+2} \ = \ 0\ .$$
   (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Vérifier que (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   (b) En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (c) Discuter la convergence de (u_n).

Exercice 9. On rappelle que
– pour tout $a > 1$ et tout $\alpha \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$;
– pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$;
– pour tout $\alpha > 0$ et tout $\beta > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$.
Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $(u_n) = (n(-1)^n)$
2. $(u_n) = \left(\frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}\right)$
3. $(u_n) = (\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbf{N}^\star}$
4. $(u_n) = \left(2 + \frac{\sin(n) - 4}{n^2}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$
5. $(u_n) = (n^{\frac{1}{\ln n}})_{n\in\mathbf{N}\setminus\{0,1\}}$
6. $(u_n) = \left(\frac{(-5)^n + n}{3^n - 1}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$
7. $(u_n) = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$

Exercice 10. On considère $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{(n+2)\,u_n}{2(n+1)}\ .$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que : $\forall n \geq 2,\ u_n \geq 2$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 11. *Irrationalité de e.*
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n.n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Posons $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 12.

1. Montrer que : $\forall x \in [3,5],\ 3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$.
2. On définit $\varphi : [3,5] \to [3,5],\ x \mapsto 3 + \frac{4}{x}$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points fixes de φ.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [3,5],\ |\varphi(x) - 4| \ \leq\ \frac{|x-4|}{2}$.
3. On considère la suite $(u_n) \in [3,5]^{\mathbf{N}^\star}$ définie par $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_{n+1} = 3 + \dfrac{4}{u_n}$.
   (a) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite ℓ.
   (b) Déterminer un entier $N \in \mathbf{N}^\star$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $n \geq N$, u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

Exercice 13. On considère $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto -x(1-x^2)$.

1. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a : $f(x) - f(y) = (x-y)(-1+x^2+xy+y^2)$.
2. En déduire que $f_{|[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]}$ est décroissante et que $f([-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]) \subset [-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$.
3. Déterminer l'ensemble des points fixes de $f_{|[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]}$.
4. Soit $u^{(0)} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$. On définit alors par récurrence $(u_n) \in [-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]^{\mathbf{N}}$ par $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
   (b) Montrer que (u_n) converge.
5. Montrer que, pour tout $0 < K < 1$, il existe $(x,y) \in [-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]^2$ tel que $|f(x) - f(y)| > K|x-y|$.

Exercice 14. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} \in (\mathbf{R}_+^\star)^{\mathbf{N}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on note f_n la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \end{array}\ .$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, il existe un unique $x_n \in \mathbf{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge.