Université Claude Bernard - Lyon 1 Automne 2016-2017
Algèbre III - PMI

Feuille d'exercices n ˚ 6 bis

TRIGONALISATION

Dans chacun des exercices ci-dessous, les matrices sont à coefficients réels. Lorsqu'on demande de les trigonaliser, il faut fournir la forme triangulaire, la matrice de passage et la relation qui lie toutes ces matrices.

Le cas confortable : quand $\dim E - \sum_\lambda \dim E_\lambda = 1$.

Exercice 1
Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. (On donne $\chi_A = (X-1)^2$).

Exercice 2
Trigonaliser $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

(On donne $\chi_B = (X-5)(X-1)^2$, une base de E_5 à savoir $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et une base de E_1 à savoir $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.)

Exercice 3
Trigonaliser $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
(On donne $\chi_C = (X-1)^3$, l'espace E_1 étant le plan d'équation $x+y+z=0$.)

Des situations moins confortables : où $\dim E - \sum_\lambda \dim E_\lambda \geq 2$.

Exercice 4
Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.
(On donne $\chi_A = (X-1)^3$ et la dimension $\dim E_1 = 1$. On recommande de ne pas calculer E_1).
On introduira $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = (A-I)X_3$ et $X_1 = (A-I)X_2$. Après s'être demandé ce que peut bien valoir $(A-I)X_1$, on fera un usage judicieux de ces vecteurs-colonnes.

Exercice 5
Trigonaliser $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ en suivant le mode d'emploi ci-dessous.

(On donne $\chi_B = (X-1)^4$ et une base de E_1 à savoir $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, qu'on notera (u_1, u_2).)

On notera $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans cette base canonique est B.
On commencera par écrire la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) où on a choisi $u_3 = \epsilon_1$ et $u_4 = \epsilon_2$.
Une fois cette matrice écrite, on la contemplera tout en relisant l'exercice 1 ; on construira alors une base (v_1, v_2, v_3, v_4) judicieuse pour laquelle $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$ tandis que v_3 et v_4 sont des combinaisons linéaires intelligemment choisies de u_3 et u_4.