

---

Feuille d'exercices n° 6

GÉOMÉTRIE AFFINE

---

**Exercice 1.** Soit  $R = (0, i, j, k)$  un repère d'un espace affine (de dimension 3). Soient  $A$  et  $B$  les points de coordonnées respectives  $(0, -1, 2)$  et  $(1, 1, 1)$  dans ce repère. On note  $R_1$  le repère  $(A, i, j, k)$  et  $R_2$  le repère  $(B, -k, -i, j)$ . Exprimer les coordonnées d'un point  $M$  dans le repère  $R_2$  en fonction de celles dans le repère  $R_1$ .

**Exercice 2.** Dans un plan euclidien muni d'un repère  $(O, i, j)$ , on considère le triangle  $ABC$  limité par les trois droites d'équations respectives  $2x - y + 3 = 0$ ,  $x - 2y + 1 = 0$  et  $2x + y - 2 = 0$ . Déterminer l'ensemble des points du plan dont les trois projections orthogonales sur ces droites sont alignées.

**Exercice 3.** On considère la similitude directe  $s$  d'écriture complexe, dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  :

$$z' = (i - 1)z + 2 - i.$$

1. Déterminer son centre, son rapport et son angle.
2. On considère dans le plan complexe les points  $A$  d'affixe  $i$ ,  $B$  d'affixe  $-1$  et  $C$  d'affixe  $-i$ .
  - (a) Déterminer les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ , images respectives de  $A$ ,  $B$  et  $C$  par la similitude  $s$ .
  - (b) Quelle est la valeur de l'angle  $\widehat{A'B'C'}$ ? de la longueur  $A'C'$ ? de l'aire du triangle  $A'B'C'$ ?

**Exercice 4.** Dans un plan affine euclidien, soit quatre points  $A, B, A'$  et  $B'$  tels que  $A \neq B$  et  $A' \neq B'$ . Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe qui envoie  $A$  sur  $A'$  et  $B$  sur  $B'$  :

1. en utilisant des nombres complexes.
2. sans nombres complexes, en commençant par traiter le cas où  $A = A'$  puis en s'y ramenant.

**Exercice 5.** On considère la transformation d'un espace affine euclidien de dimension 3 dont l'expression analytique dans un repère orthonormé est :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1. \end{cases}$$

La décrire géométriquement.

**Exercice 6.** 1. Dans  $\vec{E}$  espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée  $(i, j, k)$ , on considère l'endomorphisme  $u$  dont la matrice dans la base donnée est :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Décrire géométriquement  $u$ .

2. Dans  $E$  espace affine euclidien, de direction  $\vec{E}$ , muni d'un repère orthonormé  $(O, i, j, k)$ , on considère l'application  $f$  exprimée en coordonnées par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3 \end{cases}$$

(a) On note  $\vec{E}_1$  l'axe de la rotation  $u$  étudiée au 1. Déterminer l'ensemble :

$$\Delta = \{M \in E \mid \overline{Mf(M)} \in \vec{E}_1\}.$$

$f$  a-t-elle des points fixes ?

(b) Écrire  $f$  comme composée  $t \circ r$  où  $r$  est une rotation affine d'axe  $\Delta$  et  $t$  est une translation de vecteur  $u$  parallèle à  $\Delta$ .

**Exercice 7.** Soient  $\vec{E}$  et  $\vec{F}$  deux espaces vectoriels,  $u : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$  une application linéaire et  $y_0 \in \vec{F}$ . Montrer que l'ensemble (s'il n'est pas vide) des  $x \in \vec{E}$  tels que  $u(x) = y_0$  est un espace affine dont on donnera la direction.

**Exercice 8.** Soient  $(E, \vec{E})$  un espace affine de dimension finie sur  $\mathbb{R}$  et  $f : E \rightarrow E$  une application affine.

1. Montrer que si  $f$  admet un point fixe  $A$  alors l'ensemble des points fixes de  $f$  est :  $A + \ker(L_f - \text{Id}_{\vec{E}})$ .
2. Montrer que  $f$  admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de  $L_f$ .
3. Supposons que  $f$  soit une symétrie (i.e.  $f^2 = \text{Id}_E$ ) alors montrer que pour tout point  $M \in E$ , le milieu du segment  $[M; s(M)]$  est un point fixe.
4. Représenter les différentes symétries lorsque  $\dim(E) = 3$ . On fera un dessin pour chaque valeur possible de  $\dim \ker(L_f - \text{Id}_{\vec{E}})$

**Exercice 9.** Soit  $E$  un espace affine euclidien et soit  $f$  une application affine de  $E$  telle qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $M \in E$ , la distance de  $M$  à  $f(M)$  soit égale à  $c$ . Que dire de  $f$  ?

**Exercice 10.** Soient  $\mathcal{P}$  un plan affine réel et  $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  une application affine telle que  $f^3 = \text{Id}$  et  $f \neq \text{Id}$ .

1. Montrer que si  $A \neq f(A)$ , alors  $A, f(A), f^2(A)$  sont non alignés.

- En déduire que  $f$  est le produit de deux symétries.

**Exercice 11.** Soit  $f : E \rightarrow E$  affine. On dit que  $f$  est une *symétrie-translation* s'il existe une symétrie  $s$  et une translation  $t$  telles que  $f = s \circ t = t \circ s$ .

- Soient  $F$  un sous-espace affine de  $E$  et  $\vec{G}$  un sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$  tels que  $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$ . Soient  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  suivant  $\vec{G}$ , et  $t$  une translation de vecteur  $\vec{u}$ . Montrer que  $s \circ t = t \circ s \iff \vec{u} \in \vec{F}$ .
- Soit  $f$  une symétrie-translation. Montrer que le couple  $(s, t)$  tel que  $f = s \circ t = t \circ s$  est unique.
- Soit  $f$  affine quelconque. Montrer que  $f$  est une symétrie-translation si et seulement si  $f \circ f$  est une translation.
- En déduire que la composée d'une symétrie et d'une translation est une symétrie-translation.
- Décomposer l'application  $f$  dont l'expression analytique dans un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est :

$$\begin{cases} x' = (x - 2y - 2z + 1)/3 \\ y' = (-2x + y - 2z + 2)/3 \\ z' = (-2x - 2y + z - 1)/3. \end{cases}$$

**Exercice 12.**

- Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  et  $(B_1, B_2, \dots, B_n)$  deux familles de  $n$  points du plan dont on note respectivement  $G$  et  $H$  les isobarycentres. Montrer que  $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_i B_i} = n\overrightarrow{GH}$ .
- (a) Montrer que l'ensemble des barycentres de deux points distincts  $A$  et  $B$  est la droite  $(AB)$ .  
(b) Montrer que si les points  $A, B, C$  ne sont pas alignés, tout point du plan est barycentre de ces trois points.

**Exercice 13.** Soient  $A, B, C, D$  quatre points du plan affine  $\mathcal{E}$ . On note  $I, J, K, L, M$  et  $N$  les milieux respectifs de  $AB, AC, AD, BC, CD, DE$ . On note aussi  $E, F, G, H$  les isobarycentres respectifs des points  $(B, C, D), (A, C, D), (A, B, D)$  et  $(A, B, C)$ . Montrer que les droites  $(IM), (JN), (KL), (AE), (BF), (CG)$  et  $(DH)$  sont concourantes.

*Indication : utiliser la propriété d'associativité des barycentres.*

**Exercice 14.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine réel.

- Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
  - le barycentre  $G$  de toute famille finie  $\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_k, \lambda_k)\}$  de points pondérés de  $C$  tels que  $\lambda_i \geq 0$  pour tout  $i$  et  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , appartient à  $C$ ,
  - $\forall M, N \in C, [MN] = \{M + \lambda \overrightarrow{MN} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset C$ .

Une partie vérifiant les conditions précédentes est dite convexe.

2. Soit  $C$  une partie convexe de  $\mathcal{E}$ . Soit  $P \in C$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i).  $\forall M, N \in C, P = \text{Bar}((M, 1/2), (N, 1/2)) \Rightarrow M = P = N$ ,
- (ii).  $\forall M, N \in C, \forall \lambda \in ]0; 1[, P = \text{Bar}((M, 1 - \lambda), (N, \lambda)) \Rightarrow M = P = N$ ,
- (iii). Le complémentaire  $C_0$  de  $\{P\}$  dans  $C$  est convexe.

Un tel point  $P$  de la partie convexe  $C$ , qui ne peut être isobarycentre de deux points distincts de  $C$  est appelé point extrémal de  $C$ .

### Exercice 15.

1. Soit  $f$  une application affine d'un espace affine  $\mathcal{E}$  dans lui-même telle qu'il existe un entier naturel non nul  $n$  pour lequel  $f^n$  admet un point fixe  $A$ . Montrer que  $f$  admet un point fixe.
2. Soit  $f$  une isométrie du plan affine euclidien telle qu'il existe un entier naturel  $n$  pour lequel  $f^n$  est la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ . Déterminer  $f$ .

**Exercice 16.** Déterminer toutes les applications affines d'un espace affine  $\mathcal{E}$  dans lui-même commutant avec toutes les translations.

**Exercice 17.** Déterminer les déplacements et les réflexions de l'espace affine euclidien  $\mathcal{E}$  laissant globalement invariante une sphère donnée.

### Exercice 18.

1. On se place dans le plan affine muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $D$  une droite affine d'équation  $ax + by + c = 0$  et  $M_0(x_0, y_0)$  un point du plan.
  - (a) On note  $H(x, y)$  la projection orthogonale de  $M_0$  sur  $D$ . Déterminer les coordonnées de  $H$ .
  - (b) En déduire la formule donnant la distance du point  $M(x_0, y_0)$  à la droite  $D$  (en fonction de  $a, b, c, x_0$  et  $y_0$ ).
2. On se place désormais dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient  $P$  un plan affine d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  et  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  un point de l'espace.
  - (a) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale  $H(x, y, z)$  du point  $M_0$  sur  $P$ .
  - (b) En déduire la distance du point  $M_0$  au plan  $P$ .

### Exercice 19.

1. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de  $\mathbb{R}^3$  à coefficients entiers est un nombre entier.
2. On munit  $\mathbb{R}^3$  d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et on considère les points  $A(2, 1, -1)$ ,  $B(3, 0, 1)$  et  $C(2, -1, 3)$ . Déterminer les points  $D$  situés sur la droite passant par  $O$  et de vecteur directeur  $\vec{j}$  tels que  $ABCD$  est un tétraèdre de volume égal à 5.