

**Feuille d'exercices n° 6**

SUITES DE FONCTIONS

**Exercice 1. Convergence simple et uniforme**

On étudie les suites de fonctions réelles définies par  $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x}{x+n} + \arctan(x)$  et  $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{nx}{1+nx}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Les suites de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergent-elles simplement sur  $[0, 1]$  ?
2. Convergent-elles uniformément sur  $[0, 1]$  ? Sur  $]0, 1[$  ? Soit  $a \in ]0, 1[$ . Convergent-elles uniformément sur  $[a, 1]$  ?
3. Convergent-elles simplement et uniformément sur  $[1, +\infty[$  ?

**Exercice 2.** On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2) \exp(-nx^2).$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[-1, 1]$  vers une fonction  $f$  que l'on déterminera.
2. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .
3. Montrer que pour tout  $a > 0$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, 1]$ .

**Exercice 3.** On considère la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Etudier la convergence uniforme de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $[0, 1]$ , puis sur  $[0, 1[$ , puis sur  $[0, a]$  avec  $0 < a < 1$ .

**Exercice 4. Convergence et intégrales**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$ .

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur  $[0, 1]$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ . En déduire que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, 1]$ .
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 5.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

- a. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
- b. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout segment borné  $[a, b]$ .
- c. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur  $[a, +\infty[$ .
- d. Calculer la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

**Exercice 6.** Soit  $(f_n)_{n \geq 2}$  la suite de fonctions définies sur  $[0; 1]$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3x^2 + 2n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

- Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
- Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

- En déduire que  $(f_n)_n$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 7.** Soit  $(f_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$  la suite de fonctions définies par  $\forall n$

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos^n(x) \sin(x).$$

- Montrer que  $(f_n)_n$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
- On considère la suite de fonctions  $(g_n)_n$  définies par  $g_n = (n+1)f_n$ . Montrer que sur tout intervalle de la forme  $[\delta, \frac{\pi}{2}]$  avec  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ,  $(g_n)_n$  converge uniformément vers la fonction nulle, mais que pourtant, la suite  $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t) dt\right)_n$  ne tend pas vers 0.

**Exercice 8. Convergence uniforme et dérivées**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de fonctions définies sur  $[-1, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ .

- Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers la fonction nulle.
- Etudier la convergence de  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur  $[-1, 1]$ .
- On considère la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $g_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$ . Montrer que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers 0.

**Exercice 9. Convergence uniforme et dérivées**

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \sqrt{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ .

- Étudier les modes de convergence de la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- En déduire que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 10.** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies sur  $[0; 1[$  par

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

- Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $[0; 1[$  vers une fonction  $f$  que l'on précisera.
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer (si elle existe) la limite  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x)$ .
- Que peut-on en conclure sur la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 11.**

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$  définies sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

Montrer qu'elle converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+$ .

b. Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$  définies par

$$f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$  vers  $f : z \rightarrow e^z$ .

**Exercice 12.** Montrer que la suite de fonctions définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \cos(nx)$  n'admet aucune sous-suite uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 13.** Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$1. u_n = \int_0^{\pi/4} \tan(x)^n dx,$$

$$2. v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx.$$

**Exercice 14.** Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx,$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt[n]{1+x^n}}.$$

**Exercice 15.** Déterminer la limite, quand  $n \rightarrow +\infty$ , de  $\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$ .

*Indication : on pourra utiliser en la démontrant l'inégalité  $\ln(1+u) \leq u$  pour tout  $u \geq 0$ .*

**Exercice 16.** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue et intégrable.

Déterminer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} dt$ .

**Exercice 17.** Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ .