

Feuille d'exercices n° 6

SÉRIES DE FOURIER

Exercice 1. Série de Fourier - étude d'un cas

On considère la fonction f de période 2π , définie par $x \mapsto \text{ch}(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 2. Série de Fourier - étude d'un cas

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et f la fonction de période 2π , définie par $x \mapsto \cos(\alpha x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. Montrer que $\frac{\pi}{\alpha \sin(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha^2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

Exercice 3. Série de Fourier - fonction 2-périodique

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0; 1/2[$ et $f(x) = -1$ si $x \in [1/2; 1]$. Lorsque c'est possible, exprimer $f(x)$ comme la somme d'une série de la forme $\sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ et les a_n, b_n des coefficients réels.

Exercice 4. Existence d'un coefficient

Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

Exercice 5. Existence d'un coefficient

Existe-t-il une suite réelle $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$?

Exercice 6. Existence d'un coefficient

Existe-t-il une suite réelle $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(nx)$?

Exercice 7. Série de Fourier - étude d'un cas

1. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f paire, 2π -périodique et définie par $f(x) = x$ sur $[0, \pi]$. En déduire les valeurs des séries

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad \sum \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n^4}.$$

2. Déterminer la série de Fourier de la fonction g impaire, 2π -périodique, définie par $g(x) = x$ sur $[0; \pi[$. Étudier sa convergence. Retrouver la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 8. Série de Fourier - étude d'un cas

Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π -périodique définie sur l'intervalle $] -\pi, \pi]$ par $f(x) = e^x$. Étudier la convergence de cette série. Retrouver la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ (voir exercice 1).

Exercice 9. Examen Janvier 2011

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application 2π -périodique définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in] -\pi, \pi]$.

1. Faire un graphe représentant la fonction f sur l'intervalle $] -4\pi, 4\pi]$.
2. La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ? Justifier la réponse.
3. (a) Déterminer la série de Fourier de f en formulation réelle.
(b) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
4. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos^2(nx)}{n^2}.$$

- (a) Montrer que la série de fonctions de terme général

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n \cos^2(nx)}{n^2}.$$

est normalement convergente sur \mathbb{R} .

- (b) En déduire que g est continue sur \mathbb{R} .
5. (a) Déduire de la question 3 que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ nous avons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}.$$

- (b) En se servant d'une formule trigonométrique connue, exprimer $\cos^2(nx)$ en fonction de $\cos(2nx)$. En déduire une expression de $g(x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.
- (c) Trouver alors une expression simple de $g(x)$ pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ en fonction de x^2 et π^2 , puis pour tout x dans $[0, \pi]$ en fonction de $(x - \pi)^2$ et π^2 .

Exercice 10. Examen Janvier 2010

Soit la fonction f paire, 2π -périodique définie pour tout $x \in [0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Faire un rapide dessin du graphe de la fonction.
2. Est-ce que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier ?
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle puis en déduire sa série de Fourier en formulation complexe.

4. En déduire la valeur des sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Indication : pour la dernière somme, on pourra utiliser l'égalité de Parseval.

5. En remarquant que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

trouver la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 11. Examen Janvier 2009

On considère la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|(\pi - |x|)$ si $x \in]-\pi, \pi[$.

1. Dessiner le graphe de la fonction sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
2. La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ? Justifier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle.
4. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe.
5. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
6. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 12. Examen Décembre 2007

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = |\sin(x)|$ si $x \in]-\pi, \pi[$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle.
N.B. : On rappelle que $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.
4. À l'aide de la formule de Parseval, évaluer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0; \pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .
2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de f .
3. En déduire les valeurs des deux sommes suivantes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Exercice 14. Déterminer la série de Fourier de la fonction \sin .