Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 6

FORMES SESQUILINÉAIRES - HERMITIENNES

Exercice 1.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, $f(x, y, z) = \bar{x} + 2\bar{y} - \bar{z}$ est antilinéaire.
2. Même question avec $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $A \mapsto \mathrm{tr}(\bar{A})$.
3. Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension respective n et m et soient $\mathcal{B} \subset E$ et $\mathcal{C} \subset F$ des bases. Soit $u : E \to F$ une application antilinéaire. Soit $x \in E$ (resp. $y \in F$) dont on note $X \in \mathbb{C}^n$ (resp. $Y \in \mathbb{C}^m$) le vecteur coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$). Enfin soit U la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ (définie de manière analogue à celle d'une application linéaire). Si $y = u(x)$, dire quelle relation lie X, Y et U ?

Exercice 2.

1. Les applications suivantes sont-elles des formes sesquilinéaires hermitiennes ?
   (a) $h_1 : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ donnée par :
   $$\begin{aligned} h_1(x, y) &= \overline{x}_1 y_1 + 3\overline{x}_2 y_2 + 2i\overline{x}_3 y_3 + (2 + 3i)\overline{x}_1 y_2 + \\ &\quad (2 - 3i)\overline{x}_2 y_1 + (1 - 5i)\overline{x}_2 y_3 + (1 + 5i)\overline{x}_3 y_2 \end{aligned}$$
   (b) $h_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ donnée par $h_2(A, B) = \mathrm{tr}({}^t\overline{A} \cdot B)$.
2. Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{C}$. Pour $f \in E$ et $f = a + ib$ avec a, b à valeurs réelles on pose $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 a(x)dx + i\int_0^1 b(x)dx$. Montrer que $h_3 : E \times E \to \mathbb{C}$ définie par $h_3(f, g) = \int_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx$ est une forme sesquilinéaire hermitienne.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie n. Soit s une forme sesquilinéaire sur E. Montrer que s est hermitienne si et seulement si sa matrice S dans une base quelconque satisfait la relation : ${}^tS = \overline{S}$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n dont on note $E_{\mathbb{R}}$ l'ensemble E muni de la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel induite. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, on note $\tilde{\mathcal{B}}$ l'ensemble $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$. Soit $h : E \times E \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire hermitienne. On lui associe deux applications $h_R, h_I : E_{\mathbb{R}} \times E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ en posant pour tous $x, y \in E$, $h(x, y) = h_R(x, y) + ih_I(x, y)$.

1. Montrer que $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de $E_{\mathbb{R}}$.
2. Que peut-on dire de h_R et h_I ?
3. Soit $H = \mathrm{mat}(h, \mathcal{B})$. On pose $H = A + iB$ où $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire des matrices A et B ?
4. Écrire $\mathrm{mat}(h_R, \tilde{\mathcal{B}})$ et $\mathrm{mat}(h_I, \tilde{\mathcal{B}})$ en fonction de A et B.

5. En déduire que la donnée de h est équivalente à celle de h_R ou de h_I.
6. Montrer l'équivalence entre ces deux assertions :
   (a) $\mathcal{B}$ est une base orthogonale de E pour h.
   (b) $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base de $E_{\mathbb{R}}$ orthogonale pour h_R.
7. En déduire que si $\mathcal{B}$ est une base orthogonale de E alors $\mathrm{mat}(h, \mathcal{B})$ est diagonale à valeurs réelles.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{C}_2[X]$ l'espace des polynômes à coefficients complexes et de degré au plus 2. On définit $q : E \to \mathbb{C}$ par $q(P) = \int_0^1 |P(x)|^2 dx$.

1. Montrer que q est une forme quadratique hermitienne en exhibant sa forme polaire. Montrer que (E, q) est un espace hermitien (i.e. q est définie positive).
2. Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F constitué des éléments de la forme : $P = 2\mu - \nu + 3i\mu X^2$ avec $\mu, \nu \in \mathbb{C}$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et h une forme sesquilinéaire hermitienne non dégénérée sur E. Soit u un endomorphisme (linéaire) de E. Montrer que si pour tout $x \in E$, $h(u(x), x) = 0$ alors $u = 0$.

Exercice 7. Construire une matrice hermitienne de taille 3×3 dont les colonnes sont proportionnelles.

Exercice 8. Sans faire de calculs, dire pourquoi la matrice suivante admet au moins une valeur propre positive et une négative.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 + i\sqrt{2} & -i \\ 1 - i\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ i & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Montrer que la forme hermitienne de la question 2(b) de l'exercice 2 est un produit scalaire hermitien.

Exercice 10. Soit $(E, <, >)$ un espace hermitien et f un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de E. Soit λ une valeur propre de f. Montrer que

1. si $f^* = f^{-1}$ alors $|\lambda| = 1$,
2. si $f^* = f$ alors $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. si $f^* = -f$ alors $\lambda \in \mathbb{R}i$,
4. s'il existe un endomorphisme g de E tel que $f = g^* \circ g$ alors $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension 3. Déterminer le rang et la signature de la forme hermitienne h dont la matrice dans une certaine base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i \\ 0 & -2 & 1 + i \\ 2i & 1 - i & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit q la forme quadratique hermitienne de $\mathbb{C}^3$ définie dans la base canonique par :

$$q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\overline{x}_1 x_2 - i x_1 \overline{x}_2 + 2i\overline{x}_2 x_3 - 2i x_2 \overline{x}_3.$$

Déterminer la forme polaire associée, le rang et la signature.