

Feuille d'exercices n° 6

POLYNÔMES ANNULATEURS ET POLYNÔME MINIMAL

Exercice 1. Soit P un polynôme annulateur d'un endomorphisme $f : E \rightarrow E$.

1. Montrer que si λ est valeur propre de f alors $P(\lambda) = 0$.
2. Montrer que si f vérifie $f^3 + 2f^2 - f - 2\text{Id} = 0$ alors f est bijectif.

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'endomorphisme défini par $T(P) = P(1 - X)$.

1. Vérifier que $T^2 = \text{Id}$.
2. Déterminer les valeurs propres de T .

Exercice 3. Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E . On pourra supposer $P'(0) = 1$.

Exercice 4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ and $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. On suppose connus deux polynômes P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ annulateurs de A et B respectivement. Exprimer en fonction de P et Q un polynôme annulateur de M .

Exercice 5. Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins égal à 1 vérifiant

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad AB = P(A).$$

Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Montrer que pour toutes matrices B et C dans $\mathbb{K}[A]$, le produit BC est encore dans $\mathbb{K}[A]$ et que B et C commutent.
2. (a) Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 (b) On note d le degré du polynôme minimal de A . Montrer que la famille (I_n, A, \dots, A^{d-1}) est libre. Par un argument de division euclidienne, montrer que cette famille engendre $\mathbb{K}[A]$. En déduire la dimension de $\mathbb{K}[A]$.

Exercice 7. Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $B = A^p$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, B l'est.

Exercice 8. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes, où $a \neq b$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note P_M son polynôme caractéristique et m_M son polynôme minimal. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P_{A-\alpha I} = P_A(X - \alpha),$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad P_{A-\alpha I} = P_A(X + \alpha),$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad m_{A-\alpha I} = m_A(X - \alpha),$
4. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad m_{A-\alpha I} = m_A(X + \alpha).$

Exercice 10. Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme nilpotent de E .

1. Sans utiliser le polynôme minimal, montrer que le polynôme caractéristique de u est $P_u = (-1)^n X^n$.
Comment procéder à l'aide du polynôme minimal? Montrer que le résultat est encore vrai si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. Par récurrence, montrer qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
3. Inversement, montrer que tout endomorphisme de E dont la matrice dans une certaine base B est triangulaire avec une diagonale nulle, est nilpotente de degré $p \leq n$.

On rappelle que le degré de nilpotence de u est le plus petit entier p tel que $u^p = 0$ et $u^{p+1} \neq 0$.

Exercice 11. Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui à P associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$. Montrer que u est linéaire. Déterminer u^2 et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 12. Soit u un endomorphisme inversible d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E où l'on suppose que \mathbb{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de u .
2. En déduire que u^{-1} est un polynôme en u .

Exercice 13. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P est premier avec le polynôme minimal m_u de u si et seulement si l'endomorphisme $P(u)$ est inversible.

Exercice 14. Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Montrer que la restriction de u à F (considérée comme endomorphisme de F) est diagonalisable.

Exercice 15. Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie n . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E stables par u tels que $E = F \oplus G$. Notons m_F et m_G les polynômes minimaux respectifs des restrictions de u à F et G . Montrer que le polynôme minimal de u est égal à $\text{ppcm}(m_F, m_G)$.

Exercice 16.

1. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculer J^p pour tout $p = 1, \dots, n$.
- En déduire que J est diagonalisable.
- Montrer que I_n, J, \dots, J^{n-1} sont linéairement indépendants.
- Déterminer le polynôme minimal de J .
- Calculer les valeurs propres de J .
- Diagonaliser J en exhibant une matrice de passage.

2. Soit A la matrice circulante complexe suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

- Exprimer A comme polynôme en la matrice J .
- Montrer que pour tout polynôme complexe Q , $Q(J)$ est diagonalisable et l'ensemble de ses valeurs propres est $\{Q(\lambda) \mid \lambda \text{ est une valeur propre de } J\}$.
- En déduire que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- Calculer le déterminant de A .

Exercice 17. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^3 = X$.

Exercice 18. L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$(\star) \quad X^3 + X = 0.$$

Soit A non nulle satisfaisant (\star) . On considère u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \ker(u^2 + \text{Id})$.
- Déterminer le polynôme minimal de u .
- Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3$ n'appartient pas au noyau de u alors $(x, u(x))$ est libre.
- Montrer que $\ker(u)$ est de dimension 1. En déduire que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Conclure.

Exercice 19.

1. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x, y \in \mathbb{C}^*$. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & y \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.
(b) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que si A et B ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal, alors elles sont semblables.
2. Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, on considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer leurs rangs, leurs polynômes caractéristiques et leurs polynômes minimaux. Sont-elles semblables ?

3. (difficile) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, deux matrices ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal sont-elles semblables ?

Exercice 20. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Un endomorphisme u de E est dit cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .

1. Soit u un endomorphisme cyclique. Écrire la matrice de u dans la base \mathcal{B} .
2. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice obtenue à la question précédente.
(b) En déduire que pour tout polynôme unitaire $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré n , il existe un endomorphisme cyclique u de E dont le polynôme caractéristique est $(-1)^n Q$.
3. Soit u un endomorphisme cyclique. Montrer que le polynôme minimal de u est égal au signe près à son polynôme caractéristique.