Feuille d'exercices n° 6
Intégrales à paramètres

Exercice 1. On considère la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $F(x)$ peut s'écrire comme une intégrale dont les bornes ne dépendent pas de x, pour $x > 0$.
2. Étudier la continuité de F.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.
4. Retrouver les résultats des deux questions précédentes à l'aide des théorèmes pour les intégrales à paramètre à bornes variables.

Exercice 2. Soit f une application définie sur $[0;1]$, à valeurs strictement positives, et continue.
Pour $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 (f(t))^\alpha\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $F'(0)$.
2. En écrivant un développement limité de F à l'ordre 1 en 0, en déduire la valeur de
$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\int_0^1 (f(t))^\alpha\,\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de ses dérivées successives.
2. Soit $h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, exprimer $h(x)$ en fonction de $g(x)$.
   (b) En déduire que h se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives en 0 en fonction de celles de f.

Exercice 4. Soit F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \longmapsto e^{-t^2+2at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = 2xF(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire une expression explicite de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. On pose, pour $a > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $F'(x) = \dfrac{-x}{2a}F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $F(x) = F(0)\mathrm{e}^{-x^2/4a}$ pour tout x réel puis que $F(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-x^2/4a}$.

On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Exercice 6.

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq |u|$.
2. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que la fonction F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et expliciter $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
   (b) En déduire une expression explicite de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 7. Soit F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,t^x\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction F est égal à $]-1;+\infty[$.
2. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant : pour tout $t \in]0;1[$, $\left|\dfrac{t-1}{\ln t}\right| \leq M$.
3. En déduire que F admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et la déterminer.

4. Montrer que la fonction F est continue sur $]-1;+\infty[$.
5. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ et calculer expliciter $F'(x)$ pour $x > -1$.
6. En déduire une expression explicite de F.

Exercice de cours : la fonction Γ d'Euler

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. (a) Pour $k \geq 1$ et $0 < A < B < +\infty$, on pose

$$g_k(t) = \begin{cases} t^{A-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,|\ln t|^k & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{B-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,|\ln t|^k & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

   Démontrer que g_k est intégrable sur $]0;+\infty[$.

   (b) En déduire que Γ est $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition, et calculer $\Gamma^{(k)}$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire la valeur $\Gamma(n+1)$ pour n entier naturel et un équivalent de Γ en 0.
4. Montrer que la fonction Γ est convexe.

Pour s'entraîner :

Exercice 9. Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Étudier les variations de f.
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
3. $(*)$ Démontrer les équivalents suivants :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x).$$

   Indication : pour l'équivalent lorsque $x \to 0^+$, on pourra (démontrer et) utiliser l'encadrement : pour tout $t \in [0;\pi/2]$, $1 - \dfrac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.

Exercice 10. Pour tout $x \in [-1;1]$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est continue sur $[-1;1]$.
2. En déduire la limite $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11. Pour tout $x \in [0;+\infty[$, on note $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^x \cos t\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Étudier la continuité de f sur $[0;+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe $c \in [0;+\infty[$ tel que $f(c) = \dfrac{3}{4}$.