Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2012-2013

Math III - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 6

Groupes

Exercice 1. Déterminer lesquelles des structures suivantes forment des groupes avec les opérations données :

a. $(\{0,1\}, +)$ tel que $0+0=1+1=0$ et $0+1=1+0=1$.

b. $(\{0,1\}, \times)$ tel que $0\times 0=1\times 0=0\times 1=0$ et $1\times 1=1$.

c. $(\{0,1\}, *)$ tel que $0*0=1*1=1$ et $0*1=1*0=0$.

d. Les symétries d'un carré avec la composition.

e. Les fonctions continues $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ avec la composition.

f. Les permutations de n éléments à signature 1.

g. Les permutation de n éléments avec un nombre pair de cycles.

h. Les homothéties dans $\mathbb{R}^2$ avec la composition.

i. Les matrices 2×2 avec éléments réels avec la multiplication des matrices.

j. Les matrices 2×2 avec éléments réels avec l'addition des matrices.

k. Les matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ avec la multiplication des matrices.

l. Les matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ avec l'addition des matrices.

m. Les matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec la multiplication des matrices.

n. Les matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec l'addition des matrices.

o. Les racines n-ièmes d'unité avec la multiplication.

Exercice 2. Déterminer dans chaque cas si A est un sous-groupe de B.

a. $A=(\{2k \mid k\in\mathbb{Z}\},+)$ et $B=(\mathbb{Z},+)$.

b. $A=(\{2k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\},+)$ et $B=(\mathbb{Z},+)$.

c. $A=(\mathbb{Q}_{>0},\times)$ et $B=(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\times)$.

d. $A=(\mathbb{Q},+)$ et $B=(\mathbb{R},+)$. symétries d'un carré avec la composition.

e. $A=S_n$ et $B=S_{n+1}$ avec la composition.

f. $A=$ symétries d'un carré qui sont des rotations et $B=$ symétries du même carré.

Exercice 3. Soit $E=\{1,\dots,n\}$ et S_n l'ensemble des bijections de E dans E.

a. Si on note "$\circ$" l'opération de composition, vérifier que $(S_n,\circ)$ est un groupe. Quel est l'ordre de S_n ? Les éléments de S_n sont appelés des permutations. On note

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la permutation de S_3 qui envoie 1 sur 2, 2 sur 1, et 3 sur 3, et de façon générale

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}\in S_n.$$

b. Soient p et p' les deux permutations de S_5 définies par :

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } p' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $p \circ p'$, $p' \circ p$, et l'inverse de p.

c. On considère les trois permutations de S_4 suivantes :

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \tau' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \tau'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\pi = \tau \circ \tau' \circ \tau''$.

d. Calculer π^4. En déduire que $\pi^{-1} = \pi^3$.

e. La partie $\{id, \pi, \pi^2, \pi^3\}$ est-elle un sous-groupe de S_4 ?

Exercice 4. Une permutation σ peut être écrite comme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{smallmatrix}\right)$ ou comme liste $\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)$ ou comme produit de cycles disjoints $(1\ \sigma(1)\ \sigma(\sigma(1))\ \ldots)(a\ \sigma(a)\ \sigma(\sigma(a))\ \ldots)\ldots$.

a. Écrire les permutations suivantes comme produit de cycles disjoints : $\pi_1 = 412937568$, $\pi_2 = 351487629$, $\pi_3 = 987654321$

b. Écrire les permutations suivantes de S_5 avec la notation de deux lignes : $\sigma_1 = (135)(24)$, $\sigma_2 = (12)$, $\sigma_3 = (12345)$.

Exercice 5. Pour les permutations suivantes, calculer leur produit, les inverses et leur signatures.

a. $\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

b. $\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 7 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 7 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$

c. $\pi = 1423$ et $\sigma = 4321$

d. $\pi = 52341$ et $\sigma = 23415$

e. $\pi = (12)(34)$ et $\sigma = (1342)$ dans S_4.

f. $\pi = (123)$ et $\sigma = (12)$ dans S_3.

g. $\pi = (123)$ et $\sigma = (12)$ dans S_4.

Exercice 6. **a**. Déterminer par leur table tous les groupes à 2, 3 et à 4 éléments.

b. Ecrire la table d'addition des groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n = 2, 3, 4$ et la table d'addition du groupe produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Que peut-on en conclure ?

c. Ecrire la table de la loi $\circ$ des isométries d'un triangle équilateral.

d. Ecrire la table de composition $\circ$ du groupe des permutations S_3.

e. Soit

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'application $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to S_3$ définie par

$$f(\bar{0}) = id, \quad f(\bar{1}) = \pi, \quad f(\bar{2}) = \pi^2$$

est-elle un morphisme de groupes ?

Exercice 7. Soient $(G, \star)$ et $(G', \star')$ deux groupes et soit f un morphisme de groupes de $(G, \star)$ dans $(G', \star')$.

a. Si e est l'élément neutre de G et e' est l'élément neutre de G', montrer que $f(e) = e'$.

b. Montrer que pour tout $x \in G$, $f(x)^{-1} = f(x)^{-1}$.

c. Montrer que l'image $f(K)$ de tout sous-groupe $K < G$ est un sous-groupe de G'. Que peut-on dire de l'image réciproque$f^{-1}(K') \subseteq G$ d'un sous-groupe $K' < G'$?

d. On appelle noyau de f et on note $\ker(f)$ l'ensemble $\{g \in G \mid f(g) = e'\}$. montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{e\}$.

e. Déterminer le noyau du morphisme

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad : l \mapsto \bar{l}.$$

Exercice 8. Si H et K sont deux sous-groupes d'un même groupe G, montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

Exercice 9. **a**. Montrer que l'ensemble des éléments de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ qui sont inversibles (pour $\times$) est un groupe multiplicatif.

b. Faire la liste de ces éléments inversibles lorsque $n = 5$ et $n = 6$.

c. Trouver l'inverse multiplicatif de 6 dans l'anneau $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$.

Exercice 10. Montrer que $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \times)$.

Exercice 11. Soient G un groupe d'ordre fini et $g \in G$. Montrer que l'ordre de g divise celui de G.

Exercice 12. Soient p un nombre premier et G un groupe d'ordre p. Montrer que G est cyclique et isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Exercice 13. Soit p un nombre premier et soit $n \geq 1$ un entier. Soit G un groupe d'ordre p^n. Montrer que G admet un sous-groupe d'ordre p.
Indication : Quel est l'ordre de $\bar{p}^{k-1}$ dans $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ (avec $k \geq 2$) ?

Exercice 14. Soit $(G, \cdot)$ un groupe commutatif. Soient a et b deux éléments de G d'ordres respectifs p et q. Soit $m = \text{ppcm}(p, q)$. Montrer que G admet un élément d'ordre m.
Indication : Considérer une relation de Bézout $d = pu + qv$ avec $d = \text{pgcd}(p, q)$ puis $x = a^v b^{-u}$.