

Feuille d'exercices n° 6

CONTINUITÉ DES FONCTIONS VECTORIELLES

Exercice 1. Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \rightarrow F$.

1. (rappel de cours) Soit O un ouvert de E . On suppose que la restriction de f à O , notée $f|_O$, est continue. Montrer que f est continue en tout point de O .
2. Le résultat de la question précédente est-il vrai si on suppose cette fois que l'ensemble O n'est pas ouvert ?

Exercice 2. Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé et $a \in E$ non nul. On considère l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \begin{cases} \|x - a\| & \text{si } \|x\| \leq \|a\| \\ 0 & \text{si } \|x\| > \|a\| \end{cases}$$

1. Montrer que les ensembles $U = \{x \in E \mid \|x\| < \|a\|\}$ et $V = \{x \in E \mid \|x\| > \|a\|\}$ sont deux ouverts de E .
2. Montrer que f est continue sur U et V .
3. Montrer que f est continue en a et discontinue en $-a$. Plus généralement, soit $u \in E$ vérifiant $\|u\| = \|a\|$, la fonction f est-elle continue en u ?

Exercice 3. Soient $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . On considère l'application distance à A , $d_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad d_A(x) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

1. Soient $x, y \in E$. Montrer que, pour tout $a \in A$, $\|x - a\| - \|x - y\| \leq \|y - a\|$.
2. En déduire que d_A est une application lipschitzienne (donc continue).
3. On suppose désormais que A est une partie compacte de E . Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|$.

Exercice 4. Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f, g : E \rightarrow F$ deux fonctions continues sur E .

1. Montrer que l'ensemble $X = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E .
2. On suppose qu'il existe une partie A dense dans E sur laquelle f et g coïncident. Montrer que f et g sont égales (sur E).

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer si l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 2\}$ est ouvert et/ou fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6. (Norme d'opérateur)

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} . Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. Pour $c \in [0; 1]$, on définit l'application δ_c par : $\delta_c : E \longrightarrow \mathbb{R}$.
 $f \longmapsto f(c)$

Montrer que δ_c est une forme linéaire sur E mais qu'elle n'est pas continue.

2. Soit $\mu : E \longrightarrow E$ telle que pour tout $x \in [0; 1]$, on ait $\mu(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.
 $f \longmapsto \mu(f)$

(a) Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue de E dans lui-même.

(b) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$ pour tout $t \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $\|f_n\|$ et $\|\mu(f_n)\|$ et en déduire la norme de μ .

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, définie pour $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $\|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire suivante :

$$\phi_c : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) .$$
$$P \longmapsto P(c)$$

1. On suppose dans cette question que $c \in]-1; 1[$.

(a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $|\phi_c(P)| \leq \frac{1}{1-|c|} \|P\|_\infty$. En déduire que ϕ_c est continue.

(b) Supposons $c \in [0; 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$. Calculer $\phi_c(P_n)$ et en déduire la norme subordonnée de ϕ_c .

(c) On suppose désormais $c \in]-1; 0[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $Q_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k X^k$. Calculer $\phi_c(Q_n)$ et en déduire la norme subordonnée de ϕ_c .

2. Montrer que ϕ_c n'est pas continue si $c \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel sur lequel toutes les normes sont équivalentes. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E et f une forme linéaire sur E .

1. Montrer que $x \in E \longmapsto \|x\| + |f(x)|$ définit une norme sur E .

2. En déduire que f est continue.