Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2021-2022

Math IV - PMI - Analyse

Feuille d'exercices n^{o} 6

CONTINUITÉ DES FONCTIONS VECTORIELLES

Exercice 1. Soient $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé et $a \in E$ non nul. On considère l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \begin{cases} \|x - a\| & \text{si } \|x\| \leq \|a\| \\ 0 & \text{si } \|x\| > \|a\| \end{cases}$$

1. Montrer que les ensembles $U = \{x \in E \mid \|x\| < \|a\|\}$ et $V = \{x \in E \mid \|x\| > \|a\|\}$ sont deux ouverts de E.
2. Montrer que f est continue sur U et V.
3. Montrer que f est continue en a et discontinue en $-a$. Plus généralement, soit $u \in E$ vérifiant $\|u\| = \|a\|$, la fonction f est-elle continue en u ?

Exercice 2. Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f, g : E \longrightarrow F$ deux fonctions continues sur E.

1. Montrer que l'ensemble $X = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.
2. On suppose qu'il existe une partie A dense dans E sur laquelle f et g coïncident. Montrer que f et g sont égales (sur E).

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer si l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 2\}$ est ouvert et/ou fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t$.

1. Pour $c \in [0;1]$, on définit l'application δ_c par : $\delta_c : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(c) \end{array}$.
   Montrer que δ_c est une forme linéaire sur E mais qu'elle n'est pas continue.
2. Soit $\mu : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \mu(f) \end{array}$ telle que pour tout $x \in [0;1]$, on ait $\mu(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$. Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue de E dans lui-même.

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$, définie pour $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par $\|P\|_\infty = \displaystyle\max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire suivante :

$$\phi_c : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}[X], \| \cdot \|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, | \cdot |) \\ P & \longmapsto & P(c) \end{array}.$$

1. On suppose dans cette question que $c \in]-1;1[$.Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $|\phi_c(P)| \leq \dfrac{1}{1-|c|}\|P\|_\infty$. En déduire que ϕ_c est continue.
2. Supposons désormais $c \geq 1$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$. Calculer $\phi_c(P_n)$.
   (b) Montrer que ϕ_c n'est pas continue
3. Montrer que ϕ_c n'est pas continue si $c \in]-\infty; -1]$.